企业管理现代化系列丛书

正交试验法

吉林人民出版社

夏伯忠　　主　编

管理现代化系列丛书

正　交　试　验　法

侯化国　王玉民　编

吉 林 人 民 出 版 社

企业管理现代化系列丛书

正　交　试　验　法

侯化国　王玉民

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

石岘造纸印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 印张 8.5印数：190,000字

1985年11月第1版　1986年11月第2次印刷

印数：26,559—30,856册

统一书号：4091·287　定价：1.40元

前　言

党的十一届三中全会以来，党中央、国务院多次指出要大力推进企业管理现代化。大力推进企业管理现代化，是巩固和发展企业整顿成果的必然趋势，是适应国内技术进步、搞好城市经济体制改革、促进我国经济迅速发展，迎接世界新技术革命挑战的一项重要而迫切的任务。

近几年，我国在进行企业全面整顿和推进经济体制改革的同时，开始有计划地抓了企业管理现代化工作。

就全国来说，1983年着重解决如何正确对待外国管理经验问题，提出了“以我为主，博采众长，融合提炼，自成一家”的方针，对学习借鉴外国企业管理经验，起了正确引导和积极推动作用。1984年提出了要按照管理思想、组织、方法、手段和人才五个方面现代化的要求，探索具有中国特色的社会主义现代化企业管理体系。同时，推荐了一批在全国重点推广的现代化管理方法和手段，确定了全国重点抓的试点企业，在认识和实践上有了重大的进展。今年将继续贯彻党的十二届三中全会精神，着重解决如何围绕增强企业活力，在改革中大力推进企业管理现代化问题。这些情况说明，我国推进企业管理现代化工作有了很大进展。但是，不能估计过高，总的来看，还处于起步阶段，有些地区和企业，甚至还处于启蒙阶段。

运用现代化管理方法和手段，是推行企业管理现代化的重要内容。去年以来，许多地区、部门和企业，根据全国第

二次企业管理现代化座谈会的推荐，着重推广了18种现代化管理方法和手段。这些方法和手段，有的是我国企业管理经验的总结，有的是借鉴国外先进管理经验。实践证明，凡是认真运用这些方法和手段，都给企业和社会带来了明显的经济效益。为了更好地推广这些行之有效的现代化管理方法和手段，进一步从管理思想、组织、方法、手段和人才等方面探索具有中国特色的社会主义现代化企业管理体系。辽宁、吉林、黑龙江三省计经委和企业管理协会组织有关单位和人员编写了《管理现代化》系列丛书，由吉林人民出版社出版，每一分册即是一项现代化管理方法和手段的专著。这套《丛书》遵循学习借鉴国外管理经验"十六字"方针和理论联系实际的原则，突出了实用性和知识性，总结吸收了试点企业实践经验和干部培训经验，可供各级经济部门、企事业以及有关大专院校、干部培训和科学研究单位人员工作、学习参考。因时间短促和我们水平所限，编写中难免有误，敬请读者指正。

编写这套《丛书》过程中，得到了许多企业和有关院校、科研单位的大力支持，参考和引用了国内外的一些文献资料，在此一并致谢。

《管理现代化》系列丛书编委会

一九八五年五月

目　录

第一章　正交试验法概述

第一节　正交试验的基本概念

一、什么叫正交试验法

正交试验法也叫正交试验设计法，它是用“正交表”来安排和分析多因素问题试验的一种数理统计方法。这种方法的优点是试验次数少，效果好，方法简单，使用方便，效率高。因此，正交试验法在工农业生产和其它科学研究领域中得到广泛地应用，并且收到了显著效果。

在研究比较复杂的问题中，往往都包含着多种因素。我们把准备在试验中考察的有关影响试验指标的条件称为因素，把在试验中准备考察的各种因素的不同状态称为水平（或位级），而且这些因素与各种水平是互相交织在一起的。为了寻求最优化的生产条件，就必须对各种因素以及各种因素的不同状态进行试验，这就是多因素的试验问题。企业生产经营中，经常会遇到这样一些问题。如：为了开发新产品，选用什么样的设计参数，才能达到用户对新产品的各项质量指标的要求？选用什么样的工艺方案，才能使产品的制造过程达到优质、高产、低消耗？为了革新技术，应当怎样改变生产条件……等。诸如此类问题，由于人们主观认识的局限性，往往不能立即作出回答，总是要通过各种各样的试验来寻求最佳效果。下面举例说明：

例1．1利用工业废料烟灰制砖，通过试验寻求生产工

艺参数达到砖的折断力（公斤/厘米²）指标愈大，砖的质量愈好。已知影响砖的折断力的因素有三个，每个因素又有三种状态，具体如下：

A：成型水分，A_1： 9%；A_2：10%；A_3：11%。

B：碾压时间，B_1： 8分，B_2：10分，B_3：12分。

C：一次碾压料重，C_1：330公斤，C_2：360公斤，C_3：400公斤。

现在希望通过试验解决三个问题：

（1）找出各因素对砖的折断力质量指标的影响规律。即哪个因素是主要的？哪个因素是次要的？哪些因素单独起作用，哪些因素除了各自的单独作用外，它们之间还会产生综合效果？这种综合效果有多大？对试验指标的影响，综合效果是主要的，还是因素的单独作用是主要的？

（2）各个因素中以哪个水平为最好？

（3）各个因素试验时，依什么水平搭配起来，组成比较合适的生产条件（即最优工艺方案）最能提高产品质量？

这是三因素三水平的试验，如果每一个因素同每一个水平搭配起来进行试验，就需要做出$3^3=27$次试验。也就是必须进行如下试验：

$$\left\{\begin{matrix}A_1B_1C_1\\A_2B_1C_1\\A_3B_1C_1\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}A_1B_1C_2\\A_2B_1C_2\\A_3B_1C_2\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}A_1B_1C_3\\A_2B_1C_3\\A_3B_1C_3\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}A_1B_2C_1\\A_2B_2C_1\\A_3B_2C_1\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}A_1B_2C_2\\A_2B_2C_2\\A_3B_2C_2\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix}A_1B_2C_3\\A_2B_2C_3\\A_3B_2C_3\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}A_1B_3C_1\\A_2B_3C_1\\A_3B_3C_1\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}A_1B_3C_2\\A_2B_3C_2\\A_3B_3C_2\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}A_1B_3C_3\\A_2B_3C_3\\A_3B_3C_3\end{matrix}\right.$$

如果把上面的27次试验全部做完，并对试验结果进行科

学处理，可以圆满解决上述的三个问题。然而，人们很容易提出：能否作其中一小部分试验，通过分析就可以获得问题的圆满解决呢？而在比较多的因素试验中，如果是五个因素五个水平的试验，就必须进行$5^5=3125$次试验。这样，试验次数就太可观了。如果逐一的进行，恐怕多因素的试验问题一生也难以解决。

实践告诉我们合理安排试验和科学分析试验，是试验工作成败的关键。试验方案设计的好，试验次数就少，周期也短，这样不仅节省大量人力、物力、财力和时间，而且可以得到理想的结果。相反，试验设计安排的不好，尽管进行多次试验，浪费大量材料、动力和时间，仍然达不到预期的结果。

二、正交试验法的产生和发展

正交试验法产生于二十世纪二十年代，英国罗隆姆斯特农业试验站，首先从大量的试验中挑选适量的、具有代表性、典型性的试验点来合理地安排田间试验排列问题。1925年费歇尔在“研究工作中的统计方法”一书中，曾为试验设计加以系统论述。由于此法行之有效，很快被英、美等军事工业和科研部门所采用。二次世界大战后英国出版了正交试验应用实例，介绍了应用成果。于是正交试验法相继传到世界各国。日本企业界引进正交试验加以发展，编制成正交表做为质量管理的一项重要管理技术加以普及和推广。

我国从五十年代开始研究正交试验法，很快受到工农业生产部门和科研单位的重视和欢迎。八十年代以来被列为现代管理方法在经济管理中广泛应用。随着科学技术和经济的高速发展，正交试验法作为多因素试验设计优化的一种科学方法，必将得到更加广泛的应用和发展。

第二节 正 交 表

一、正交表

正交试验是利用“正交表”来安排试验和分析试验数据的方法。它适用于安排一类因素较多，周期较长和多指标的试验。最简单的正交表是$L_4(2^3)$，见表1—1。

表1—1 $L4\ (2^3)$

试验号 \ 列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

记号$L_4(2^3)$的含意如下：“L”代表正交表，L下角的数字“4”表示有4横行（以后简称为行），即要做四次试验，括号内的指数“3”表示有3纵列（以后简称为列），即最多允许安排的因素个数是3个；括号内的数“2”表示表的主要部分只有2种数字，即因素有两种水平1与2，称之为1水平与2水平。

表$L_4(2^3)$之所以成为正交表是因为它有两个特点：

1、每一列中，每一因素的每个水平，在试验总次数中出现的次数相等。这里不同的水平只有两个——1和2，它们在每一列中各出现2次。

2、任意两个因素列之间，各种水平搭配出现的有序数列（即左边的数放在前，右边的数放在后，按这一次序排出

的数对）时，每种数对出现的次数相等。这里有序数对共有四种（1，1），（1，2），（2，1），（2，2），它们各出现一次。

因素搭配均衡，即选出的4次试验，在三个因素的两种水平间搭配是均衡的。凡是满足上述两个特点的，我们称之为具有均衡性。显然$L_4(2^3)$表具备了这种特点。因此，按正交表安排的试验，从试验结果中能够得出正确的结论。多因素多水平的正交试验法就是利用各种不同的正交表来安排具有均衡搭配特性的试验方法。满足上述两个特点的表就称为正交表。

常见的正交表有：$L_4(2^3)$，$L_8(2^7)$，$L_{16}(2^{15})$，$L_{32}(2^{31})$……；$L_9(3^4)$，$L_{27}(3^{13})$……；$L_{16}(4^5)$，…；$L_{25}(5^6)$……等，具体表格见本书附录。

二、正交表的选择

选择正交表的原则，应当是被选用的正交表的因素数与水平数等于或大于要进行试验考察的因素数与水平数，并且使试验次数最少。如我们要进行3因素2水平的试验，选用$L_4(2^3)$表最理想。但是，要进行5因素2水平的试验仍用$L_4(2^3)$表，那么便放不下5个因素了。这时，应当选用$L_8(2^7)$表，这样尽管只用了此表的5个因素列，还有两个因素列是空列，这没有什么关系。

下面我们以例1.1为例介绍正交表的选择方法。例1.1共有三个因素，即成型水分；碾压时间；一次碾压料重；每个因素各有三个水平。

表1—2

因素 水平	成型水分（%）	碾压时间（分）	一次碾压料重（公斤）
Ⅰ	9	8	330
Ⅱ	10	10	360
Ⅲ	11	12	400

本例是一个多因素多水平的试验。可以选用L_9（3^4）正交表来安排试验(如表1—3)。为什么要选择L_9（3^4）正交表呢？因为在三水平的正交表中，常用的正交表有L_9（3^4），L_{18}（3^7），L_{27}（3^{13}），L_{33}（3^{13}）……等。由于三水平正交表中不存在三因素三水平的正交表，即不能完全“对号入座”。所以，只有选用L_9（3^4）才能放下三因素。虽然空闲一列，但该表较之其它各表，试验次数最少。

我们选择此正交表共进行9次试验，它是从可能进行搭配的$3^4=81$次试验中一次挑出来的，只要条件许可，还可以同时进行试验。

三、试验计划的制订

具体的试验计划是在L_9(3^4)表头的1、2、3列上分别写上因素A、B、C，就得到表1—4。这种把因素放入正交表表头的工作称为表头设计。在表1—3的各因素列中，分别将水平数字1、2、3处放入该因素的1水平、2水平和3水平。这样就得到一张试验计划表，如表1—4。

表1—4就是按L_9（3^4）正交表安排的试验计划表。只有严格执行试验计划，才能得到预期的结果。然而，为了

表1—3　　　　　　　　L_9（3^4）

列号 / 试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	[illegible]
9	3	3	2	1

表1—4　　　　　　　　**试验计划表**

列号 / 试验号	A 成型水分（%）	B 碾压时间（分）	C 一次碾压料重（公斤）	试验结果（折断力）（公斤/厘米²）
1	9	8	330	16.9
2	9	10	360	19.1
3	9	12	400	16.7
4	10	8	360	19.8
5	10	10	400	23.7
6	10	12	330	19.0
7	11	8	400	25.3
8	11	10	330	20.4
9	11	12	360	23.1

减少由于试验仪器，人员操作所造成的试验随机误差。在进行试验时，可以不完全按上述试验号顺序进行，而可以随机地进行。如用抽签办法决定试验的顺序，以便消除人为主观的臆断（当然，由于生产技术的要求，有的试验顺序不能完全如此）。在按L_9（3^4）表做完9次试验之后，我们可以把每次试验结果分别填入试验结果栏内。本例的试验结果为

试验后测量得到的砖的折断力指标（公斤/厘米²）。

第三节　直观分析法

对试验结果（数据）的处理分析，通常有两种方法，一是直观分析法，又叫极差分析法。它是通过极差分析和画趋势图来进行综合比较得出试验结论；另一种方法是方差分析（下一章专门论述）。

一、直观分析法的步骤

1、确定同一因素的不同水平对试验指标的影响。

怎样确定比较同一因素的不同水平对试验指标的影响呢？如：怎样确定A因素（成型水分）的三个水平：A_1（9%），A_2（10%），A_3（11%）对砖的折断力的影响呢？我们总共作了9次试验，从这9个试验数据中进行两两比较是不行的。因为它们的试验条件完全不同（见表1—4），没有可比条件。然而，我们把这9个试验结果适当组合起来，就会具有一定的可比性。这就是正交设计的综合比较性。

首先，我们分别计算A因素的A_1水平（9%）在试验方案1、2、3号中的总折断力：

我们设9次试验的结果分别为y_1，y_2，y_3，y_4，y_5，y_6，y_7，y_8，y_9。则1、2、3号中A_1的总折断力为：

$y_1+y_2+y_3=16.9+19.1+16.7=52.7$公斤/厘米²。

A_2水平（10%）在试验方案4、5、6号中的总折断力为：

$y_4+y_5+y_6=19.8+23.7+19=62.5$公斤/厘米²。

A_3水平（11%）的试验方案为7、8、9号，其折断

力：

$y_7+y_8+y_9=25.3+20.4+23.1=68.8$公斤/厘米^2。

将上面的折断力取平均值（各自除以相同的水平数）。

$$\bar{A}_1=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)=\frac{52.7}{3}=17.6$$

$$\bar{A}_2=\frac{1}{3}(y_4+y_5+y_6)=\frac{62.5}{3}=20.8$$

$$\bar{A}_3=\frac{1}{3}(y_7+y_8+y_9)=\frac{68.8}{3}=22.9$$

这样，$\bar{A}_1$，$\bar{A}_2$，$\bar{A}_3$就具有可比性。因为在A_1条件下的三次试验（第1—3号）中，B、C皆取三种水平。而且三种水平出现的次数相同，各为一次。同样，在A_2条件下的三次试验（第4—6号）中，B、C皆取三种水平，而且，三种水平出现的次数相同，各为一次。同理，在A_3条件下的三次试验（第7—9号）中，B、C也取三种水平，而且三种水平出现的次数相同，各为一次。这就说明，在A_1条件，A_2条件和A_3条件下的三次试验，虽然其它条件（B、C）发生了变动，但这种变动是“平等的”。所以，$\bar{A}_1$，$\bar{A}_2$和$\bar{A}_3$之间的差异反映了A的三个水平对砖的折断力的影响（当然可能还有试验误差的影响）。而在$\bar{A}_1$，$\bar{A}_2$和$\bar{A}_3$中，$\bar{A}_3$为最大22.9，$\bar{A}_1$最小为17.6。

2、极差分析，确定各因素对试验指标的影响。

最好水平与最差水平之差，称为极差，用R表示。对A因素来说，极差$R=\bar{A}_3-\bar{A}_1=22.9-17.6=5.3$。所以，A因素取$A_3$时的折断力最大。其意义是A因素（成型水分）为3水平时，每块砖的折断力与最差的1水平相比，平均可提高折断力5.3公斤/厘米^2。

同样，按表1—4可以比较因素B、C的三个水平对砖的折断力的影响。比较时同样以1水平对应的三个试验为一组，以2水平与3水平对应的三个试验各为一组进行计算比较。其结果如下：

$\bar{B}_1 = \frac{1}{3}(y_1 + y_4 + y_7) = 20.7$

$\bar{B}_2 = \frac{1}{3}(y_2 + y_5 + y_8) = 21.1$

$\bar{B}_3 = \frac{1}{3}(y_3 + y_6 + y_9) = 19.6$

$\bar{C}_1 = \frac{1}{3}(y_1 + y_6 + y_8) = 18.8$

$\bar{C}_2 = \frac{1}{3}(y_2 + y_4 + y_9) = 20.7$

$\bar{C}_3 = \frac{1}{3}(y_3 + y_5 + y_7) = 21.9$

上述的各种计算都可以在正交表上进行。具体的作法就是将9次试验结果y_i（$i = 1, 2\cdots, 9$）按试验号填入正交表的右栏，再按列计算，如表1—5。其中I_i表示正交表中第i列的1水平所对应的数据之和，$\bar{\mathrm{I}}_i$为其平均值；II_i表示正交表中第i列的2水平所对应的数据之和，$\bar{\mathrm{II}}_i$为其平均值；III_i表示正交表中第i列的3水平所对应的数据之和，$\bar{\mathrm{III}}_i$为其平均值。R_i表示正交表中第i列中水平的极差值。由于因素A放在第1列，所以$\bar{\mathrm{I}}_1$就是$\bar{A}_1$，$\bar{\mathrm{II}}_2$就是$\bar{A}_2$，$\bar{\mathrm{III}}_3$就是$\bar{A}_3$。其它各列同样如此。同理，R_1为A因素三水平中的极差值，各列均如此，结果如下：

$R_1 = \bar{\mathrm{III}}_1 - \bar{\mathrm{I}}_1 = \bar{A}_3 - \bar{A}_1 = 5.3$

$R_2 = \bar{\mathrm{II}}_2 - \bar{\mathrm{III}}_2 = \bar{B}_2 - \bar{B}_3 = 1.5$

$R_3 = \bar{\mathrm{III}}_3 - \bar{\mathrm{I}}_3 = \bar{C}_3 - \bar{C}_1 = 3.1$

从表1—5中的最下面一栏极差R_i的分析中，我们可以看出因素A（成型水分）取A_3（11%）比取A_1和A_2的平均折断力都高；因素B（碾压时间）取B_2比取B_1和B_3的平均折断力高。同样，因素C（一次碾压料重）取C_3比取C_2

表1—5

表头设计	A	B	C	试验结果
试验号 \ 列号	1	2	3	y_i
1	1	1	1	16.9
2	1	2	2	19.1
3	1	3	3	16.7
4	2	1	2	19.8
5	2	2	3	23.7
6	2	3	1	19.0
7	3	1	3	25.3
8	3	2	1	20.4
9	3	3	2	23.1
I_i（1水平试验指标总和）	52.7	62.0	56.3	
II_i（2水平试验指标总和）	62.5	63.2	62.0	
III_i（3水平试验指标总和）	68.8	58.8	65.7	
$\bar{\mathrm{I}}_i=\mathrm{I}_i/3$	17.6	20.7	18.8	
$\bar{\mathrm{II}}_i=\mathrm{II}_i/3$	20.8	21.1	20.7	
$\bar{\mathrm{III}}_i=\mathrm{III}_i/3$	22.9	19.6	21.9	
R_i	5.3	1.5	3.1	

和C_1的折断力都高。因此，在考虑因素单独作用的条件下，可以选择$A_3B_2C_3$为最优工艺参数。

3、最优工艺方案的确定

事物总是有内在联系的，我们还要确定各因素对试验指标综合影响的次序，即确定各因素对折断力的影响顺序。具体来说，就是要对每个因素的各个水平之间极差值大小进行比较。哪个因素的极差值R大，它便是主要因素，哪个因素的极差值较小，它便是次要的因素……。从例1.1中，表1—5的分析结果，A因素各水平的极差最大为5.3，C因素各水平的

极差为3.1，B因素各水平的极差为1.5最小。所以，按因素对折断力影响的综合比较分析，得出$R_1 > R_3 > R_2$。因而，最后得出最优工艺方案为：$A_3C_3B_2$。即：成型水分为11%，一次碾压料重400公斤，碾压时间为10分钟的方案为最优工艺方案。

二、画趋势图

对试验结果的直观分析法，除了极差分析外。为了更形象直观的得出试验分析结果，我们还可以采用画趋势图的方法，得出正确的综合分析结论。

所谓画趋势图就是要画出各因素与指标的关系图。它是一种座标图。它的横座标用各因素的不同水平表示。纵座标均为试验指标（如例1.1中的折断力）。然后，通过各因素不同水平时的试验指标的几个点之间的联线（通常需要三个水平），即三点以上联线画成折线图。这样，便可以一目了然看出各因素的哪个水平为最优。同时，各图之间相互比较也可以清楚地看出在各因素最好水平时的试验指标数值（如折断力）。由于它们是在相同座标上画的图形，所以便能看出哪个联线的数值（试验指标）最大。那么，此因素便是主要的影响因素。结合表1—5的分析结果，其趋势图如下：

从下图可以看出各因素对试验指标（砖的折断力）的影响。此图是采用同一比例座标，故可以看出，纵座标（折断力）A_3最大，C_3次之，最小者为B_2。由此得出最优的工艺方案为：$A_3C_3B_2$。这和极差分析结果是一致的。

第四节 交互作用、自由度和正交表的选用

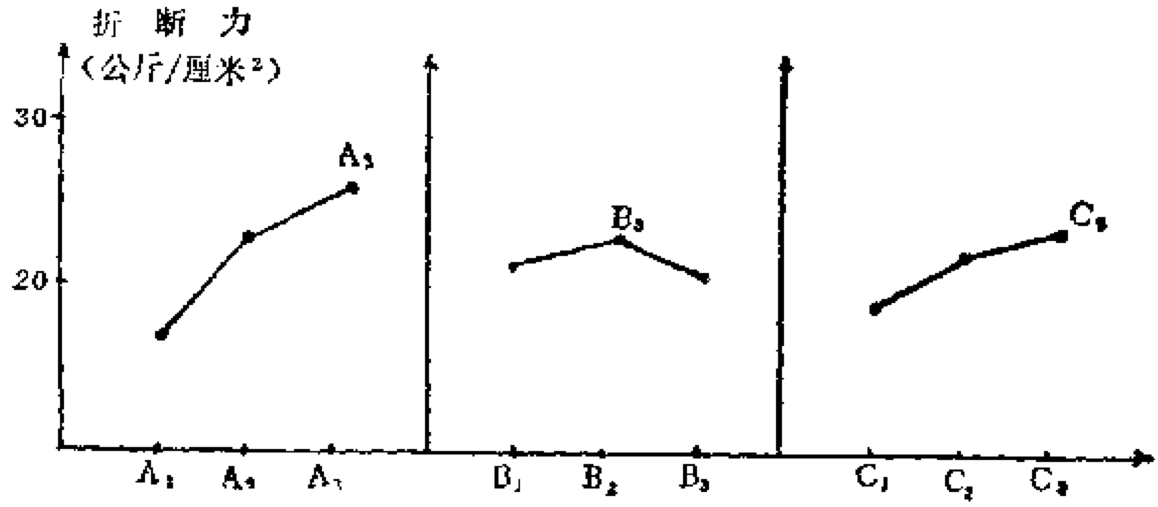


图1—1　因素与试验指标的关系图

一、交互作用

在多因素对比试验中，某些因素对试验指标的影响往往有相互制约，互相联系的现象。在处理多因素对比试验时，不仅需要分别研究各因素水平的改变对试验指标的影响以及每个因素的单独作用，还要考虑它们之间的相互作用。通常在一个试验里，不仅各个因素在起作用，而且因素之间有时会联合起来影响某一指标，这种作用叫做交互作用。

如某生产队对四块试验田，用不同方式施肥，结果如下：

第一块没加化肥，平均亩产500斤；第二块加7斤氮肥，平均亩产538斤；第三块加5斤磷肥，平均亩产562斤；第四块加7斤氮肥，5斤磷肥。平均亩产700斤。列表如下：

表1—6

P磷肥 / N氮肥	$P_1=0$	$P_2=5$
$N_1=0$	500斤	562斤
$N_2=7$	538斤	700斤

从表1—6中可以看出，只加5斤磷肥的效果，使亩产增加62斤；只加7斤氮肥的效果，使亩产增加38斤；而氮磷肥都加的效果，使亩产增加700斤－500斤＝200斤。因此，氮磷肥的交互作用效果＝氮磷肥都加的总效果－只加氮肥的效果－只加磷肥的效果＝200斤－38斤－62斤＝100斤。

这就反映了联合作用的影响。在正交试验设计中，把这个值的一半称为N和P的交互作用，记为$N\times P$，即

$$N\times P=\frac{1}{2}\times 100=50$$

我们举个实际例子，例1．2来说明具有交互作用的试验设计和分析方法。为了解决"化铣"的质量问题，某研究所应用正交试验设计法安排了"化铣"试验。其试验考虑的因素和水平如下：

表1—7

因素 / 水平	A：NaOH浓度(克)	B：AL含量(克)	C：温度（℃）
1	120	（A）10%	80℃
2	180	（A）1/3	90℃

由于NaOH浓度较低，AL含量较高时，有可能出现不能进行试验的情形。因此，我们把AL的含量采用活动水平。这是三因素二水平的试验问题。同时，我们还要考察各因素间的交互作用，即$A\times B$，$A\times C$，$B\times C$，这样一来就相当于有六个因素。我们可以应用$L_8(2^7)$正交表来安排

这个试验。表头设计如下：

列号	1	2	3	4	5	6	7
因素	A	B		C			

即将A、B、C三个因素分别放在1、2、4列上。由于要考察每两个因素间的交互作用，查两列间的交互作用表：（表1—8）

由于A、B安排在1、2列，先在对角线上查出列号（1）和（2），然后，从（1）往右看与从（2）往上竖看交叉处的数字是3，则第1、2列A和B的交互作用A×B

表1—8　　$L_8(2^7)$二列间的交互作用

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
	(1)	3	2	5	4	7	6
		(2)	1	6	7	4	5
			(3)	7	6	5	4
				(4)	1	2	3
					(5)	3	2
						(6)	1
							(7)

占第三列。同理可查出A×C的交互作用列占第5列，B×C的交互作用列占第6列。这样得到表头设计如下：

列号	1	2	3	4	5	6	7
因素	A	B	A×B	C	A×C	B×C	

这样安排之后第7列是空列。如还有第4个因素D，常常把它安放在第7列上。但在表头设计时，尽量留有空列比较好，可以作为其它之用。

我们根据上面的表头设计制定的具体试验方案表1—9

所示。

表1—9

列号 / 序号	1	2	3	4	5	6	7	A	B	A×B	C	A×C	B×C	7
1	1	1	1	1	1	1	1	120	12	(1)	80	(1)	(1)	(1)
2	1	1	1	2	2	2	2	120	12	(1)	90	(2)	(2)	(2)
3	1	2	2	1	1	2	2	120	40	(2)	80	(1)	(2)	(2)
4	1	2	2	2	2	1	1	120	40	(2)	90	(2)	(1)	(1)
5	2	1	2	1	2	1	2	180	18	(2)	80	(2)	(1)	(2)
6	2	1	2	2	1	2	1	180	18	(2)	90	(1)	(2)	(1)
7	2	2	1	1	2	2	1	180	60	(1)	80	(2)	(2)	(1)
8	2	2	1	2	1	1	2	180	60	(1)	90	(1)	(1)	(2)

在实际进行试验时，我们只须考虑A、B、C三个因素的具体水平值，A×B，A×C，B×C列上的水平号只是在计算极差时才予以考虑。即把交互作用项看成一个因素，形式地算出K_1，K_2，k_1，k_2及R值。如果R值比较大，就说明这个交互作用是显著的。对于不显著的交互作用列和因素，我们都把它们作为空列来看待。

衡量这个试验结果，我们有两个指标：表观质量和腐蚀速度。表观质量包括均匀度、侵蚀比、蜂窝状等，进行综合评分评价。现将试验结果和极差的计算列表，如表1—10所示。

由于L_8（2^7）正交表的D列是空列。所以，这项的极差值可作为试验误差的估计值。由表观质量这个指标的极差值可以看出，C列，A×C，B×C列的极差值都比D列的小。因而，都可以看成是试验误差引起的。即温度对表观质量没有明显的影响，而对表观质量这项指标来说，其因素的主次关系是：

表1—10

	A	B	A×B	C	A×C	B×C	D	表观质量	腐蚀速度
1	120	12		80				50	1.77
2	120	12		90				50	1.84
3	120	40		80				45	0.92
4	120	40		90				45	1.40
5	180	18		80				40	1.70
6	180	18		90				50	2.71
7	180	60		80				90	1.36
8	180	60		90				85	1.57

	表观质量							腐蚀速度						
	A	B	A×B	C	A×C	B×C	D	A	B	A×B	C	A×C	B×C	D
K_1	190	190	275	225	230	220	235	5.93	8.02	6.54	5.75	6.97	6.44	42.7
K_2	265	265	180	230	225	235	220	7.34	5.25	6.73	7.52	6.30	6.83	30.6
k_1	47.5	47.5	68.5	56.25	57.5	55	58.75	1.4825	2.005	1.6350	1.4375	1.7425	1.61	1.81
k_2	66.25	66.25	45	57.5	56.25	58.75	55	1.8575	1.3125	1.6825	1.88	1.575	1.7075	1.5075
R	18.75	18.75	23.5	1.25	1.25	3.75	3.75	0.375	0.6925	0.0475	0.4425	0.1675	0.0975	0.3025

主——————→次

表观质量：$A \times B \longrightarrow \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$

由此可以看出，NaOH浓度和AL含量的交互作用对表观质量影响特别显著。在这种情况下，A和B因素究竟取哪一个水平搭配最好呢？这可以用"二元分析"方法来决定。在A列和B列中，出现四种相同的数字对：（1.1），(1.2)，（2.1），（2.2），每种数字都进行了两次试验。我们把对应于这两次试验结果数据加起来，取其平均值。这样共有四个数据，取这四个数值中较大的数值相对应的水平组合作为较优水平组合。具体按下列格式计算：

	B_1	B_2
A_1	$\frac{A_1B_1+A_1B_1}{2}$	$\frac{A_1B_2+A_1B_2}{2}$
A_2	$\frac{A_2B_1+A_2B_1}{2}$	$\frac{A_2B_2+A_2B_2}{2}$

把相应的试验结果数据代入：

	B_1	B_2
A_1	$\frac{50+50}{2}=50$	$\frac{45+45}{2}=45$
A_2	$\frac{40+50}{2}=45$	$\frac{90+85}{2}=87.5$

这四个数据中以87.5为最大，较优组合是A_2B_2。这表明对于表观质量，NaOH浓度及AL含量都取第二水平才好。即NaOH取180，AL取60。

对于腐蚀来说，因D列是空列，它的极差值作为试验误差大小的估计值。$A \times B$列，$A \times C$列及$B \times C$列的极差值都比

D列的极差值小，也可以看作是试验误差引起的。因此，对腐蚀速度来说，不存在交互作用$A \times B$，$A \times C$，$B \times C$的影响。从极差看出，对腐蚀速度影响最大的是铝含量，其次是温度，再次是碱浓度。即因素的主次是：

$$主 \longrightarrow 次$$

$$B \longrightarrow C \longrightarrow A$$

较优的水平组合是$A_2B_1C_2$，即碱浓度和温度较高为好，铝含量较低为好。

如果我们不考虑交互作用，即仅仅考虑各因素的单独作用。那么最好的生产条件是$A_2B_2C_2$。但考虑A、B、C三因素之间的交互作用，我们得出对表观质量影响因素的次序是：$A_2 \times B_2 \longrightarrow \begin{matrix}A_2\\B_2\end{matrix}$（C因素看作是试验误差，对表观质量没有影响）。

这说明用正交表进行试验设计，虽然只做了所有可能组合中的一部分试验。但通过分析，好的生产条件将不会漏掉。这是因为我们利用了正交表特具的综合可比性，选做了一组（8次）有代表性的试验。对每个因素的所有水平全面地进行了优选的缘故。

要考察因素间交互作用问题，在进行表头设计时，需要注意的是：二水平的交互作用在正交表上占有一列位置；三水平的交互作用在正交表上占有两列位置。一般地，n个水平的交互作用在正交表上占有n—1列位置。

上面我们介绍了用正交表进行试验设计和直观分析法。它的优点是利用正交表挑选一部分有代表性的试验，减少了试验次数；利用正交表进行整体设计，可以同时做一批试

验，缩短了试验周期；只需要在正交表上作少量的计算，就可以获得重要的信息。不仅可以直接比较各因素，还可以比较因素间的交互作用对试验指标的影响。从中选出最优的生产条件。其缺点是不能给出误差的估计，因而无法知道分析的精度。这种缺点，在下一章采用方差分析法中，便可以克服。

二、自由度和正交表的选用原则

从上面进行的正交试验设计和直观分析法，我们可以知道，在试验计划的安排中，首先要根据实际情况，选定因素、因素的水平以及需要考察的交互作用。然后选出一张正交表，进行表头设计。表头上每列只能安排一个内容，不允许出现同一列包含两个或两个以上内容的混杂现象。表头设计以后，因素所占的列就组成了试验计划。所以，一个设计方案的最后确定，最终都归结为选表和表头设计。表选得合适，表头设计得好，就可以用比较经济的人力、物力和时间完成试验任务。但正交表的选用又是很灵活的，没有严格的规定。必须具体情况，具体分析，具体选用。我们可以遵循下列一条原则：要考察的因素及交互作用的自由度总和必须不大于所选正交表的总自由度。

关于自由度的概念及其计算方法，我们将在第二章和第五章中作些说明。这里简单介绍一下自由度的计算，给出两条规定，便于使用。

1、正交表的总自由度$f_{总}$＝试验次数－1；正交表每列的自由度$f_{列}$＝此列水平数－1。

2、因素A的自由度f_A＝因素A的水平数－1；因素A、B间交互作用的自由度$f_{A\times B}$＝因素A的自由度×因素B的自

由度$=f_A\times f_B$。

根据这种原则，在例1.2中，$L_8(2^7)$ 总共安排 8 次试验。$f_{总}=8-1=7$；各列均有2个水平。所以各列自由度，$f_1=f_2=f_3=f_4=f_5=f_6=f_7=2-1=1$；很显然$f_{总}=f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7$。因素A、B、C、D均是2水平的。因此，$f_A=f_B=f_C=f_D=2-1=1$。而交互作用的自由度 $f_{A\times B}=f_A\times f_B=1\times 1=1=f_{B\times C}=f_{A\times C}$。由此看出，二水平正交表中每列的自由度总是1。而二水平因素的自由度也总是1。所以，二水平因素在二水平正交表中正好占一列；而两个二水平因素的交互作用的自由度也是1，故也占1列。

按上述原则选定的正交表，并不一定能放得下要考察的因素及交互作用。它只能给我们提供选取正交表的可能性。至于如何能得到更合适的正交表，还必须通过我们自己反复实践才能成功。

进行表头设计时，我们首先要考虑交互作用不可忽视的因素。也包括暂时不知道能否忽略的因素。按着不可混杂的原则，将这些因素及其交互作用填在表头上。然后，将可以忽视有交互作用的那些因素任意安排在余下的各列上。

实践中可以体会到，按例1.2“化铣”的试验问题，使用一张$L_8(2^7)$的正交表。我们也可以得到下面的表头设计：

列　　号	1	2	3	4	5	6	7
表头设计	A	C	A×C	B	A×B	B×C	D

很明显它和前面的表头设计不一样。尽管如此，但实践会证明，它们不会影响试验的最终分析结果。即因素和交互

作用所引起的影响大小及最优工艺方案的选择基本上是一致的。

第五节 相同水平的多因素试验设计

一、2^n因素的试验设计及分析

上一节我们以例1.2详细地介绍了2^n因素的试验和直观分析法。现在我们再回顾和总结一下表头设计的过程。

首先，当明确了试验要考察的因素和水平后。还必须根据实际经验，判断和剔除不存在的交互作用和可以忽略的交互作用，以及明确哪些交互作用是有待试验考察的。如例1.2在过去经验的基础上明确要考察四个因素A、B、C、D和交互作用$A\times B$。而交互作用$A\times C$和$B\times C$希望在不增加试验次数的情况下能给以适当考察。我们首先要计算一下自由度。在考察四个因素A、B、C、D和$A\times B$交互作用下。总的自由度为$4\times 1+1\times 1=5$，即最少需用$L_8(2^7)$表来安排试验计划，做8次试验。用$L_8(2^7)$表同时考察$A\times C$，$B\times C$下制订试验计划是这样的：

1、首先要考察交互作用的因素A和B。将A放在第1列，B放在第2列，由$L_8(2^7)$的交互作用，查表得$A\times B$放在第3列。

2、再考虑到交互作用因素C，我们将C放在第4列。这时$A\times C$放在第5列，$B\times C$占第6列。第7列为空列可放因子D。这样便可以得到例1.2的表头设计了。

将表头设计中A、B、C、D所在列抽出来就是试验计划。如果在例1.2中，所有的交互作用$A\times B$，$A\times C$，$A\times D$，$B\times C$，$B\times D$，$C\times D$都要通过试验来考察，如果

我们仍选用$L_8(2^7)$表，并仍然将A放在第1列，B放在第2列，C放在第4列，D放在第7列。那么，表头设计将是：

表头设计	A	B	C×D A×B	C	B×D A×C	A×D B×C	D
列号	1	2	3	4	5	6	7

这样，从表头上可以看出交互作用间产生了混杂。这种表头设计当然是不合理的。是否能在$L_8(2^7)$表上重新设计以避免这种混杂现象出现呢？这需要我们计算一下自由度便能得出结论。$L_8(2^7)$总共有$8-1=7$个自由度。现在我们要考察四个因素和六对交互作用。其总的自由度总和是$4\times1+6\times1=10$，而各因素列（包括交互作用列）的自由度$10>7$，用$L_8(2^7)$表只有7个自由度已容纳不了这么多因素的试验问题。我们只有另选择正交表如$L_{16}(2^{15})$才有可能避免这种混杂现象。此时用$L_{16}(2^{15})$所做的表头设计为：

表头设计	A	B	A×B	C	A×C	B×C		D	A×D	B×D		C×D			
列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

由此看出，我们避免混杂现象的出现，主要是靠增加试验次数。选用$L_{16}(2^{15})$要作16次试验，比$L_8(2^7)$表的试验次数增加了一倍。所以，凡是可以忽略的交互作用，要尽量剔除，以便选用较小的正交表制定试验计划，减少试验次数。这是表头设计的一个重要原则。必须指出的是，当暂时还不知道能否具有交互作用的时候，应在不增加试验次数的条件下，尽量照顾切忌混杂。

上面介绍的交互作用，都是两个因素的交互作用。在某些情况下，还存在着三个或三个以上因素间的交互作用，称为高级交互作用。同时把两个因素的交互作用称为一级交互作用。高级交互作用以因素连乘的记号来表示，如$A \times B \times C$就是二级交互作用。如例1.2的$A \times B \times C$可用$L_8(2^7)$的第7列计算。因为$A \times B$是第3列，再查第3列与因素C的第4列的交互作用列，就是第7列。

一般来说，大部分一级交互作用和大部分二级和二级以上的交互作用都是可以忽略的。这样便能在设计中采用较小的正交表，减少试验次数。如在一个2^{10}因素试验，即10个2水平因素试验中，

1因素有$C_{10}^1 = 10$个

2个因素间的交互作用有$C_{10}^2 = 45$个

3个因素间的交互作用有$C_{10}^3 = 120$个

4个因素间的交互作用有$C_{10}^4 = 210$个

5个因素间的交互作用有$C_{10}^5 = 252$个

6个因素间的交互作用有$C_{10}^6 = 210$个

7个因素间的交互作用有$C_{10}^7 = 120$个

8个因素间的交互作用有$C_{10}^8 = 45$个

9个因素间的交互作用有$C_{10}^9 = 10$个

10个因素间的交互作用有$C_{10}^{10} = 1$个

总计共有1023个。

如果这1023个因素和交互作用都要在表头上加以安排而避免混杂，势必选用$L_{1024}(2^{1023})$表进行设计，要做1024次试验，这是无法办到的。如在2^{10}因素试验中，只要对10个因素及45个一级交互作用共55个因素加以安排，则一般选用$L_{64}(2^{63})$表就行了。如果其中一部分一级交互作用还可以忽略。那就可以选用自由度更少的正交表，如：$L_{32}(2^{31})$，$L_{16}(2^{15})$等。这样，试验次数就从1024次降到64次或32次、16次，即减少了几十倍。

可见，利用交互作用可以忽略这一点来减少试验次数的潜力是很大的。而哪些交互作用可以忽略，必须用实践经验和专业知识来判断。正由于忽略了可以忽略的交互作用，才能使正交试验设计法具备了减少试验次数这种优点。

二、3^n因素的试验设计

例1．3，某厂某车间进行一种高速钢淬火试验问题。需要考虑的因素及水平如下：

因素 / 水平	淬火温度	淬火时间	回火温度
水平 1	1250℃	8〃/mm	540℃
水平 2	1275℃	12〃/mm	560℃
水平 3	1300℃	15〃/mm	580℃

根据生产经验和专业知识，交互作用可以全部忽略。

1、选用正交表，进行表头设计

由于A、B、C都是三水平因素，所以选用三水平正交表。最常用的是$L_9(3^4)$和$L_{27}(3^{13})$（见附录）。

三水平正交表与二水平正交表一样，具有两个性质。即

每一列中“1”、“2”、“3”出现的次数相等；任两列同横行组成的有序数对（1,1），（1,2），（1,3），（2,1），（2,2）、（2,3），（3,1），（3,2），（3,3）出现的次数相等。

这个性质说明，假如在三水平正交表上安排三水平因素。那么这三个水平是可以相互比较的，即具有综合可比性。

应当指出的是，三水平正交表与二水平正交表的重要区别是：它的每两列的交互作用列是另外两列，而不是一列。这是因为三水平正交表每列的自由度为2，而两列的交互作用的自由度等于两列的自由度相乘，即$2\times2=4$，所以要占两个三水平列。例如在$L_9(3^4)$表中，第1、2列的交互作用列是第3、4列。第1、4列的交互作用列是第2、3列…等。而$L_{27}(3^{13})$的交互作用可查表（见附录）。

由此可见，三个三水平因素在三个水平正交表中占3列。由于本例不考虑交互作用。而$L_9(3^4)$有四个三水平列，所以能放下三个三水平因素。我们将A、B分别放在第1、2列上，按理第3、4列是A、B的交互作用$A\times B$，本例由于$A\times B$可以忽略。所以，改为其它因素，将因素C放在第3列上。我们选用$L_9(3^4)$安排试验，得表头设计如下：

$L_9(3^4)$ 列号	1	2	3	4
因　　素	A	B	C	

2、试验计划与试验结果

将A、B、C三因素分别放在$L_9(3^4)$表的第1、2、

3列，这是表头设计。经过这样设计以后。在$L_9(3^4)$表的第1列上的“1”的地方写上$A_1=1250℃$，在“2”的地方写$A_2=1275℃$，在“3”的地方写上$A_3=1300℃$。对B、C也是如此，就得试验计划（见表1—11）。

表1—11　　**试验计划表**

因素/列号/试验号	A 1	B 2	C 3	4	A 淬火温度	B 淬火时间	C 回火温度	D	试验结果
1	1	1	1	1	1250℃	8〃/mm	540℃		
2	1	2	2	2	1250℃	12〃/mm	560℃		
3	1	3	3	3	1250℃	15〃/mm	580℃		
4	2	1	2	3	1275℃	8〃	560℃		
5	2	2	3	1	1275℃	12〃	580℃		
6	2	3	1	2	1275℃	15〃	540℃		
7	3	1	3	2	1300℃	8〃	580℃		
8	3	2	1	3	1300℃	12〃	540℃		
9	3	3	2	1	1300℃	15〃	560℃		

表1—12　　**试验结果分析表**

因素/列号/试验号	A 1	B 2	C 3	D 4	试验结果（硬度）
1	1	1	1	1	65.5
2	1	2	2	2	64.3
3	1	3	3	3	62
4	2	1	2	3	66
5	2	2	3	1	65
6	2	3	1	2	66.3
7	3	1	3	2	64.4
8	3	2	1	3	65
9	3	3	2	1	67

续表

K_1	191.8	195.9	196.8	(197.5)	
K_2	197.3	194.3	197.3	(195)	
K_3	196.4	195.3	191.4	(193.3)	
k_1	63.9	65.3	65.6	(65.8)	
k_2	65.8	64.8	65.8	(65)	
k_3	65.5	65.1	63.8	(64.4)	
R	1.9	0.5	2.0	(1.4)	

3、直观分析

表1—12为例1．3的试验结果分析表。我们最后得到的三个极差是：1.9；0.5；2.0。根据三个极差数的大小，可以看出各个因素对试验结果的影响程度。回火温度这一列的极差数为2.0，是三个数中最大的。说明它对硬度的影响是主要的。其次是淬火温度。而对应于淬火时间这一列的极差数是0.5，相比之下很小，可以认为是试验误差的影响。说明淬火时间对硬度没有什么影响。从分析中可以看出，A因素(淬火温度)取第二水平好。C因素（回火温度）也取第二水平好。淬火时间对硬度没有什么影响。但从节省时间的角度来看，淬火时间短些好。

在$L_9(3^4)$的第四列，即D列，我们没有安排因素，但同样可以计算出极差数1.4。这个数做为对试验误差的估计。因此，我们可以粗略地看出，由于1.4与1.9，2.0较接近。尽管我们可以用1.9，0.5，2.0三个数的大小来说明各因素对硬度指标的影响次序。但总的来说，淬火温度，淬火时间，回火温度对硬度指标的影响是不大明显的。从极差R的大小来看，各因素的影响次序是：C＞A＞B。而C因素又以2水平C_2为最大，A因素又以2水平A_2为最好。B因素又以1水平B_1

为较好。故考虑因素与水平的最优生产条件为：

$C_2A_2B_1$

我们应用$L_9(3^4)$表仅作9次试验验证所选方案的正确性。如果与实际相符合，就可以用于生产。如果与实际有明显差异时，应进一步分析原因。

我们通过画趋势图（见图1—2），更可以直观地看出下列工艺方案最优：$C_2A_2B_1$。

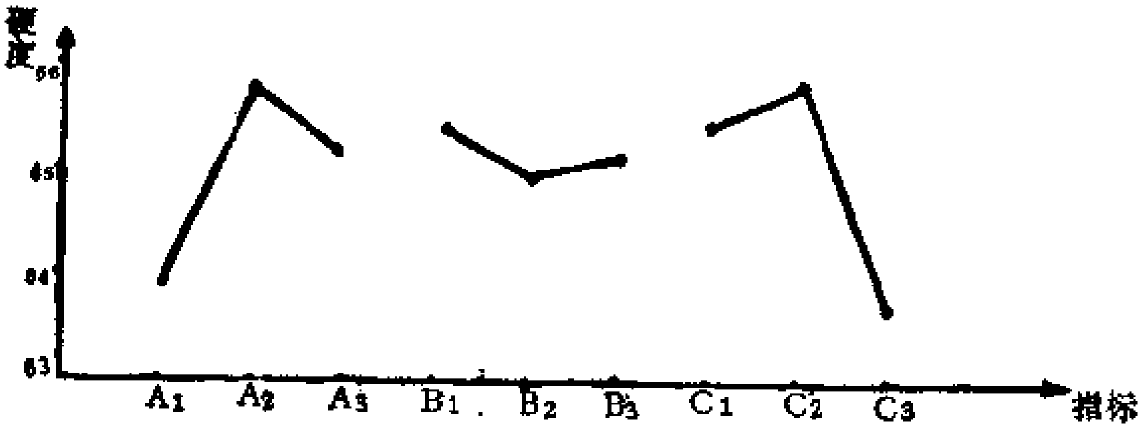


图 1—2 因素与硬度指标关系图

三、4^n因素和5^n因素的试验设计

把三水平试验设计与计算分析方法只作简单的修改，就能应用到大于3水平的各种多水平的试验中去。

现就四水平和五水平试验分析中的问题作以简单介绍：

1、对4^n因素试验，要用四水平正交表$L_{16}(4^5)$等进行表头设计。对5^n因素试验，要用五水平正交表$L_{25}(5^6)$等进行表头设计（正交表（$L_{16}(4^5)$与$L_{25}(5^6)$（见附录）。

2、四水平与五水平正交表与二、三水平正交表有完全类似的两个性质；而与它们的重要差异是：四水平正交表每

两列的交互作用列是另外某三列。五水平正交表每两列的交互作用列是另外某四列。这结论可从计算交互作用的自由度中获得。每个四水平因素的自由度是3，两个四水平因素的交互作用的自由度是9。四水平正交表中每列的自由度也是3；每个五水平因素的自由度是4。两个五水平因素的交互作用的自由度是16。五水平正交表中每列的自由度也是4。

3、比较因素主次与水平好坏的方法与三水平试验完全相仿。即对于第j列上的四水平（或五水平）因素，先分别计算它们的四个（或五个）水平对应的平均试验结果$\overline{\mathrm{I}}_j$，$\overline{\mathrm{II}}_j$，$\overline{\mathrm{III}}_j$，$\overline{\mathrm{IV}}_j$（对五水平因素还有$\overline{\mathrm{V}}_j$）。其中$\mathrm{I}_j$，$\mathrm{II}_j$，$\mathrm{III}_j$，$\mathrm{IV}_j$（及$\mathrm{V}_j$）分别是因素的第1、2、3、4（及5）水平的试验数据之和。然后作出因素与指标的关系图（趋势图）。根据关系图中各因素的不同水平所对应的点子的离散程度比较因素的主次。即点子较分散的因素（极差R大）较重要。而点子较集中的因素（R小者）为次要。再根据关系图中每个因素的不同水平对应的点子的高低比较每个因素的水平好坏。如果试验要求指标越高越好，则高的点子对应的水平就比其余较低的点子所对应的水平好。

第二章　方差分析

方差分析是数理统计的基本方法之一，是工农业生产和科学研究中分析数据的一种工具。在生产实践和科学研究中，常常要研究由于生产技术条件不同对试验结果有无显著影响。例如，在工业生产上由于原材料不同对试验结果有无显著影响；由于机械设备和操作人员的素质水平不同对产品质量有无显著影响等等，这些都是方差分析所要解决的问题。本章就单因素试验的方差分析和多因素试验的方差分析进行讨论，并给出一般情况下的计算公式。

第一节　单因素试验的方差分析

一、问题的提出

第一章介绍了正交试验设计的直观分析，掌握了这种方法，就可以运用正交设计去解决许多实际问题了。大家都知道，任何试验过程都存在误差，而这种误差又比较小，当对试验精度要求不高的时候可以不考虑它。但是，在试验误差比较大，或者对试验精度要求较高的时候，不考虑它是不行的。其原因是试验数据本身带有误差，而通过试验数据计算出的各个量也带有误差，它们都将给准确的分析带来困难。方差分析正是将试验条件不同所引起的试验结果间的差异与偶然因素所引起的试验结果的差异区分开来的一种数学方法，由此需要用它来对正交试验设计进行统计分析。

在试验过程中，我们把其他一切因素视为固定不变的，只就其一个因素进行试验，先确定这个因素变化的若干个水平，然后对每个水平进行若干次重复试验，这就叫做单因素试验。

先看一个例子：

例2—1 某灯泡厂用四种不同配料方案制成的灯丝，进行试验生产，在同一配料生产出的灯泡中随机地抽取五个灯泡做试验，测得其使用寿命如表2—1所示。

表2—1　　　　（单位：小时）

灯丝配料方案 \ 使用寿命 \ 试验序号	1	2	3	4	5	各组合计	组内平均
A_1	1600	1610	1650	1680	1700	8240	1648
A_2	1500	1640	1400	1700	1750	7990	1598
A_3	1640	1550	1600	1620	1640	8050	1610
A_4	1510	1520	1530	1570	1640	7770	1554

试问这四种灯丝生产的灯泡的使用寿命有无显著性的差异？在这里，可设灯泡的使用寿命时数为指标，灯泡的配料为因子，四种配料方案为四个水平，这是单因素四水平的试验。如果这四种配料方案制成的灯丝其灯泡的使用寿命没有显著性的差异，我们就可以从中选取一种既经济又方便的配料方案；如果有显著性的差异，则选取一种较优的配料方案，从而提高灯泡的使用寿命。

对表2—1的数据进行初步分析可以看出：

第一，灯泡的使用寿命在各次试验中都有变化，说明存在着差异；

第二，从表中列出的各组灯泡的使用寿命平均数来看，它们之间也有差异，说明不同的配料方案，对灯泡使用寿命是有一定影响的；

第三，观察每组内的5个数据，发现其间也有差异，显然这些差异不是由于灯丝配料工艺不同引起的，而是由于其它偶然因素引起的；

第四，由于试验误差的存在，我们自然就对第二中的结论发生了怀疑，不同灯丝的平均使用寿命之间的差别是否一定是由于灯丝的差别引起的？是否可能灯丝对灯泡的使用寿命没有显著影响，而这些差别只不过是试验误差的反映？

因此为了得出正确的结论，就有必要进行方差分析。分析试验误差对数据的影响，分析因子水平的改变对指标的影响，并且将它们进行比较，以判断因子对指标的影响程度。

二、试验误差的分析

生产实践和科学实验都有这样的经验，同一工艺条件下生产出产品或在同一条件下进行的试验得到的数据不会是完全一样的。但是，它们都是围绕着某个数值上下波动。这个数值是在没有误差干扰的情况下，试验数据都应该相同，都应等于它们的理论值。因此，只要试验过程存在误差，同一条件下的试验数据总可以分为两部分，即真值与误差两部分。真值是在试验条件不变的前提下固定的，误差则随不同的具体试验数据而变化。因此试验数据是围绕真值上下波动的，所以误差也就围绕着〇上下地变化。当我们把同一试验条件下的大量数据平均起来的时候，误差也就在相当大的程度上互相抵消了，这时数据的平均值就接近于真值，由此，我们可以用同一条件下各次试验数据减去它们的平均值的办

法，把误差近似地计算出来。

在这里必须指出的是，根据试验数据计算的平均值毕竟只是接近真值，而并不是真值，试验数据计算出的平均值本身，也仍然包含着误差的干扰，但是，由于大量数据的相加，使得误差对平均值的影响已远较某一次试验误差要小得多了。正因为这样，就可以用各次试验数据与其平均值的差值近似地估计误差，并不是真正的误差。

根据上述的思路方法，利用例2—1，首先求出A因素的每一水平下的平均值。

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{5}(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15})$$
$$= \frac{1}{5}(1600 + 1610 + 1650 + 1680 + 1700) = 1648$$
$$\bar{x}_2 = \frac{1}{5}(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25})$$
$$= \frac{1}{5}(1500 + 1640 + 1400 + 1700 + 1750) = 1598$$
$$\bar{x}_3 = \frac{1}{5}(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35})$$
$$= \frac{1}{5}(1640 + 1550 + 1600 + 1620 + 1640) = 1610$$
$$\bar{x}_4 = \frac{1}{5}(x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45})$$
$$= \frac{1}{5}(1510 + 1520 + 1530 + 1570 + 1640) = 1554$$

然后把各水平下的五个数据都减去它们的平均值，就得到各数据的误差部分，如表2—2所示。

这个表给出了各次试验中误差的一个近似估计。其中所有的“合计”都等于〇，这是由于我们在计算各数据的误差时，用平均值代替了真值的结果。

我们知道，在某一次试验中，试验误差是正是负，是大是小，都带有一定的偶然性，是一个随机变量，因此，仅仅从表中的数据，即单看各次试验的误差，并不能了解到整个试验过程误差的性质。要掌握试验误差的规律，就必须把各次试验的误差总起来加以考虑研究。通常的办法是先平方再

表2—2

工艺方案 \ 误差 \ 试验序号	1	2	3	4	5	合计
A_1	$x_{11}-\bar{x}_1=-48$	$x_{12}-\bar{x}_1=-38$	$x_{13}-\bar{x}_1=2$	$x_{14}-\bar{x}_1=32$	$x_{15}-\bar{x}_1=52$	0
A_2	$x_{21}-\bar{x}_2=-98$	$x_{22}-\bar{x}_2=42$	$x_{23}-\bar{x}_2=-198$	$x_{24}-\bar{x}_2=102$	$x_{25}-\bar{x}_2=152$	0
A_3	$x_{31}-\bar{x}_3=30$	$x_{32}-\bar{x}_3=-60$	$x_{33}-\bar{x}_3=-10$	$x_{34}-\bar{x}_3=10$	$x_{35}-\bar{x}_3=30$	0
A_4	$x_{41}-\bar{x}_4=-44$	$x_{42}-\bar{x}_4=-34$	$x_{43}-\bar{x}_4=-24$	$x_{44}-\bar{x}_4=16$	$x_{45}-\bar{x}_4=86$	0

求和的办法把它们汇总起来。表2—2的数据按此方法汇总起来的结果是：

$$S_{误}=(x_{11}-\bar{x}_1)^2+(x_{12}-\bar{x}_1)^2+(x_{13}-\bar{x}_1)^2+(x_{14}-\bar{x}_1)^2+(x_{15}-\bar{x}_1)^2$$
$$+(x_{21}-\bar{x}_2)^2+(x_{22}-\bar{x}_2)^2+(x_{23}-\bar{x}_2)^2+(x_{24}-\bar{x}_2)^2+(x_{25}-\bar{x}_2)^2$$
$$+(x_{31}-\bar{x}_3)^2+(x_{32}-\bar{x}_3)^2+(x_{33}-\bar{x}_3)^2+(x_{34}-\bar{x}_3)^2+(x_{35}-\bar{x}_3)^2$$
$$+(x_{41}-\bar{x}_4)^2+(x_{42}-\bar{x}_4)^2+(x_{43}-\bar{x}_4)^2+(x_{44}-\bar{x}_4)^2+(x_{45}-\bar{x}_4)^2$$
$$=2304+1444+4+1024+2704+\cdots\cdots+1936+1156+576+256+7396=108480$$

这个数，我们称做误差的变动平方和，简称误差的变动。表2—2的每一个数反映了一次试验下误差引起的数据变动，$S_{误}$就反映了所有的试验中误差引起的总变动。

一般情况下，误差变动平方和的计算公式可以总结成：

$S_{误}$=各条件下（数据－平均值）²之和

我们要弄清楚误差的性质，首先要把表2—2中各次试验中误差的估计值总起来加以分析，求出误差的变动，其次要进一步估计误差对每次试验数据造成的变动的大小。从表2—2中把误差汇总起来有20个数据，那么把$S_{误}$用20去除不就行了吗？但仔细分析就会发现，这样做的道理并不充分。因为每次试验中客观存在的误差虽然应当是相互独立的，但是表2—2中的数值却只是误差的近似估计，它们并不是彼此独立毫无关系的。它们满足下面四个约束条件：

$$(x_{11}-\bar{x}_1)+(x_{12}-\bar{x}_1)+(x_{13}-\bar{x}_1)+(x_{14}-\bar{x}_1)+(x_{15}-\bar{x}_1)$$
$$=-48+(-38)+2+32+52=0$$
$$(x_{21}-\bar{x}_2)+(x_{22}-\bar{x}_2)+(x_{23}-\bar{x}_2)+(x_{24}-\bar{x}_2)+(x_{25}-\bar{x}_2)$$
$$=-98+42+(-198)+102+152=0$$
$$(x_{31}-\bar{x}_3)+(x_{32}-\bar{x}_3)+(x_{33}-\bar{x}_3)+(x_{34}-\bar{x}_3)+(x_{35}-\bar{x}_3)$$
$$=30+(-60)+(-10)+10+30=0$$

$$(x_{41}-\bar{x}_4)+(x_{42}-\bar{x}_4)+(x_{43}-\bar{x}_4)+(x_{44}-\bar{x}_4)+(x_{45}-\bar{x}_4)$$
$$=-44+(-34)+(-24)+16+86=0$$

由于这四个条件的限制，表2—2虽然列出20个数值，实际上可以自由变动却只有16个。

即$20-4=4\times(5-1)=16$

因此，不应该除以20，而应该除以16。这样就得到：

$$V_{误}=\frac{S_{误}}{f_{误}}=\frac{108480}{16}=6780$$

上面的数值16叫做误差的自由度，记为$f_{误}$。它的一般计算公式是：

$f_{误}$＝各条件下（数据个数－1）之和而把比值：

$$V_{误}=\frac{S_{误}}{f_{误}}$$

称为误差的平均变动。或称为每一个自由度的误差变动。

三、因素的分析（条件误差的分析）

前面所述，用各试验条件下数据的平均值去近似估计其真值。那么就看如表2—3所示

表2—3

工艺方案 \ 平均值 \ 试验序号	1	2	3	4	5
A_1	1648	1648	1648	1648	1648
A_2	1598	1598	1598	1598	1598
A_3	1610	1610	1610	1610	1610
A_4	1554	1554	1554	1554	1554
总平均	1602.5	1602.5	1602.5	1602.5	1602.5

此表的数值可以近似地认为是20次试验的真值。因为同一个试验条件下真值总应该相等，所以每一横行内的数值都是相同的。我们不难设想，如果每个试验条件下的真值并没有差别，那么每一纵列内的数值也应该相等，即都等于总平均值。虽然每一纵列内的数值各不相同，它应该反映出试验条件不同的影响（注意，由于数据平均值仍包含误差的影响，所以这些数值各不相同，其中也有来自误差的影响在内）。这样我们就可以用表2—4列出各水平下数据平均值与总平均值之间的差值，把这20个数值汇总起来得到：

$$
\begin{aligned}
S_A &= (\bar{x}_1-\bar{x})^2+(\bar{x}_1-\bar{x})^2+(\bar{x}_1-\bar{x})^2+(\bar{x}_1-\bar{x})^2+(\bar{x}_1-\bar{x})^2\\
&\quad+(\bar{x}_2-\bar{x})^2+(\bar{x}_2-\bar{x})^2+(\bar{x}_2-\bar{x})^2+(\bar{x}_2-\bar{x})^2+(\bar{x}_2-\bar{x})^2\\
&\quad+\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad + \qquad \cdots\cdots\\
&\quad+(\bar{x}_4-\bar{x})^2+(\bar{x}_4-\bar{x})^2+(\bar{x}_4-\bar{x})^2+(\bar{x}_4-\bar{x})^2+(\bar{x}_4-\bar{x})^2\\
&= 5\ [(\bar{x}_1-\bar{x})^2+(\bar{x}_2-\bar{x})^2+(\bar{x}_3-\bar{x})^2+(\bar{x}_4-\bar{x})^2]\\
&= 5\ [45.5^2+(-4.5)^2+7.5^2+(-48.5)^2]\\
&= 5\ [2070.25+20.25+56.25+2352.25]\\
&= 22495
\end{aligned}
$$

这个数，叫做因子A的变动平方和，简称为因子A的变动。

从表2—4中，我们可以看到每个纵列有4个不同的数值，即$\bar{x}_1-\bar{x}=45.5$，$\bar{x}_2-\bar{x}=-4.5$，$\bar{x}_3-\bar{x}=7.5$，$\bar{x}_4-\bar{x}=-48.5$，这4个数值又满足一个约束条件，即：

$$
\begin{aligned}
&(\bar{x}_1-\bar{x})+(\bar{x}_2-\bar{x})+(\bar{x}_3-\bar{x})+(\bar{x}_4-\bar{x})\\
&=45.5+(-4.5)+7.5+(-48.5)=0
\end{aligned}
$$

因子A的自由度是：

$$f_A=4-1=3$$

所以，因子A的平均变动应该是S_A除以f_A，即：

表2—4

工艺方案 \ 效应 \ 试验序号	1	2	3	4	5
A_1	$\bar{x}_1-\bar{x}=45.5$	$\bar{x}_1-\bar{x}=45.5$	$\bar{x}_1-\bar{x}=45.5$	$\bar{x}_1-\bar{x}=45.5$	$\bar{x}_1-\bar{x}=45.5$
A_2	$\bar{x}_2-\bar{x}=-4.5$	$\bar{x}_2-\bar{x}=-4.5$	$\bar{x}_2-\bar{x}=-4.5$	$\bar{x}_2-\bar{x}=-4.5$	$\bar{x}_2-\bar{x}=-4.5$
A_3	$\bar{x}_3-\bar{x}=7.5$	$\bar{x}_3-\bar{x}=7.5$	$\bar{x}_3-\bar{x}=7.5$	$\bar{x}_3-\bar{x}=7.5$	$\bar{x}_3-\bar{x}=7.5$
A_4	$\bar{x}_4-\bar{x}=-48.5$	$\bar{x}_4-\bar{x}=-48.5$	$\bar{x}_4-\bar{x}=-48.5$	$\bar{x}_4-\bar{x}=-48.5$	$\bar{x}_4-\bar{x}=-48.5$

$$V_A = \frac{S_A}{f_A} = \frac{22495}{3} = 7498.33$$

由此可得到，因子变动及自由度计算的一般公式为：

$S_{因}$ = 因子各水平〔重复数×(平均值－总平均)²〕之和

$f_{因}$ = 因子的水平数－1

因子的平均变动就是：

$$V_{因} = \frac{S_{因}}{f_{因}}$$

需要说明的是，在上面公式中，因子在某水平下数据的个数简称为水平的重复数，其余公式的含义都是十分清楚的。

四、总变动的分析

我们把表2—2的20个数值与表2—4的20个数值对应地加起来，得到表2—5。不难看出，把这些偏差汇总起来，就得到20个数据的偏差，由于正负相消，反映不出离散程度，故将其平方起来汇总，称为总变动平方和。由于它刻划了20个数据围绕总平均值的总变动情况，所以又简称为总变动。它的一般计算公式是：

$S_{总}$ = 各（数据－总平均）²之和

例2—1 $S_{总}$计算如下：

$$\begin{aligned} S_{总} = & (-2.5)^2+(7.5)^2+(47.5)^2+(775)^2+(97.5)^2 \\ & +(-102.5)^2+(37.5)^2+(-202.5)^2+(97.5)^2+(147.5)^2 \\ & +(37.5)^2+(-52.5)^2+(-2.5)^2+(17.5)^2+(37.5)^2 \\ & +(-92.5)^2+(-82.5)^2+(-72.5)^2+(-32.5)^2+(37.5)^2 \\ = & 130975 \end{aligned}$$

我们可以发现，通过对例2—1进行试验误差分析和因

表2—5

工艺方案 \ 偏差 \ 试验序号	1	2	3	4	5
A_1	$x_{11}-\bar{x}=-2.5$	$x_{12}-\bar{x}=7.5$	$x_{13}-\bar{x}=47.5$	$x_{14}-\bar{x}=77.5$	$x_{15}-\bar{x}=97.5$
A_2	$x_{21}-\bar{x}=-102.5$	$x_{22}-\bar{x}=37.5$	$x_{23}-\bar{x}=-202.5$	$x_{24}-\bar{x}=97.5$	$x_{25}-\bar{x}=147.5$
A_3	$x_{31}-\bar{x}=37.5$	$x_{32}-\bar{x}=-52.5$	$x_{33}-\bar{x}=17.5$	$x_{34}-\bar{x}=17.5$	$x_{35}-\bar{x}=37.5$
A_4	$x_{41}-\bar{x}=-92.5$	$x_{42}-\bar{x}=-82.5$	$x_{43}-\bar{x}=-72.5$	$x_{44}-\bar{x}=-32.5$	$x_{45}-\bar{x}=37.5$

子变动分析时，分别求出它们变动的平方和。即$S_{误}=108480$，$S_A=22495$，将其相加得：

$$S_A+S_{误}=22495+108480=130975$$

正好等于总变动$S_{总}$。这决不是偶然的巧合，而是反映一组试验数据内部的客观规律性。在一般情况下公式为：

$$S_{总}=S_{因}+S_{误}$$

我们称它为变动的分解公式。它说明了试验数据的总变动总可以分解为两部分，一部分是误差的变动，完全是由误差引起的；另一部分是因子的变动，反映出因子水平不同的影响，同时也包含着误差的影响。

在计算总变动平方和之后，还要求计算出总的自由度，其公式如下：

$$f_{总}=试验数据总数-1$$

因此，也就不难看出：

$$f_{总}=f_{因}+f_{误}$$

这个式子叫做总自由度的分解公式。

在应用正交设计方法进行的多因素对比试验时，可将上述的总变动分解公式与总的自由度的分解公式改写成如下的形式：

$$S_{总}=各S_{因}之和+S_{误}$$

$$f_{总}=各f_{因}之和+f_{误}$$

这两个公式是我们讨论正交设计统计分析问题的重要出发点。

用上述办法计算各个变动平方和是很不方便的。经过数学推导，可以得到实用公式。现在我们考虑有m个试验条件，每个条件重复进行n次试验，每次试验的可能结果都是一个随机变量，同一条件下的n次重复试验的可能是同一总体的

一个样本。设第i号条件的总体为x_i，第i号条件下第j次的试验结果为x_{ij}($i=1,2,3,\cdots,m$；$j=1,2,3,\cdots,n$)，则(x_{i1}，x_{i2}，…，x_{in})就是x_i的一个容量为n的样本。对应于m个总体，有m个这样的样本。试验进行之后，就得到m个样本值。问题就是根据这m个样本值分析试验条件的变化对所考虑的指标有无显著影响。

根据上述对误差变动的分析，因子变动的分析和总变动的分析，在样本值已知时可用x_{ij}代替x_{ij}，这样总变动公式可用下面数学表达式：

$S_{总}$＝各（数据－总平均）^{2}的和

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\cdot\bar{x}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{x}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-2mn\bar{x}^2+mn\bar{x}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-mn\bar{x}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-\frac{1}{mn}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-CT$$

（其中 $\bar{x}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$，

$$T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij},\quad CT=\frac{T^2}{mn})$$

同样，$S_{误}$＝各条件下（数据－平均值）²之和

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\bar{x}_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\bar{x}_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-2n\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i^2+n\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-n\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^2}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij}-\frac{\sum_{i=1}^{m}T_i^2}{n}$$

$$\left(\text{其中}\quad T_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)$$

同样，$S_{因}$＝因子各水平〔重复数×（平均值－总平均）²〕之和

$$=n\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-\bar{x})^2$$

$$=n\left(\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i^2-2\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i\bar{x}+\sum_{i=1}^{m}\bar{x}^2\right)$$

$$= n\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i^2 - 2n\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i\bar{x} + n\sum_{i=1}^{m}\bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m}T_i^2}{n} - \frac{2}{mn}T^2 + \frac{1}{mn}T^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m}T_i^2}{n} - \frac{T^2}{mn}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m}T_i^2}{n} - CT$$

用这些公式的右端计算各个变动平方和是很简便的，而且可减少计算误差。

根据总变动平方和$S_{总}$的分解公式可以看出：一项是所有不同条件的观察值与其所属条件平均值之差的平方和，它表达了各条件内部观察值之间的差异，叫做误差变动平方和，也称为组内离差平方和，记作$S_{误}$。另一项是各条件平均值与总平均值之差的平方和，这一项表达了各条件之间观察值的差异，叫做因子变动的平方和，也称为组间离差平方和，记作$S_{因}$。

依据上述的数学推导和分析，我们可知$S_{总}$，$S_{因}$，$S_{误}$的自由度分别为$mn-1$，$m-1$，$m(n-1)$。

五、显著性检验判断统计假设是否成立与方差分析表

为了判别所考察的因素对指标的影响是否显著。需要将

表示该因素影响的条件差异与表示随机差异（试验误差）进行比较。但鉴于这些平方和与观测值的个数及分组的组数等有关，因此我们不直接进行比较，而先将它们相对应的自由度进行平均。离差平方和被自由度的平均值称为均方，其意义相当于方差。具体比较计算如下：

$$F=\frac{S_{因}/f_{因}}{S_{误}/f_{误}}=\frac{V_{因}}{V_{误}}，为服从F分布的随机变量。$$

如果假设是正确的，则$V_{因}$与$V_{误}$应是大致相等，二者比值接近于1。

如果假设不正确，即各列平均数之间，除随机误差外，还有条件误差存在，则$V_{因}$应是显著大于$V_{误}$，F值也远大于1，因为差异的显著性总是表现为$V_{因}>V_{误}$。如果$V_{因}<V_{误}$就不需要进行F检验，便得知是不显著的，究竟$V_{因}$对$V_{误}$要大到何等程度，才算差异显著，从而判断假设H_0为不可信（待验假设或称为原假设，一般记作H_0），需要有一个判断标准。这个标准就是与我们所规定的α值以及自由度f_1，f_2相对应的临界值F_α。

如果$F<F_\alpha$就认为各列平均间的差异不显著，原假设H_0不能否定；如果$F>F_\alpha$就认为差异显著，即因素各水平对其观测值的差异有显著影响。

一般常用的显著性水平（危险率）为$\alpha=0.05$或$\alpha=0.01$。用F值与$F_{0.01}$，$F_{0.05}$进行比较，通常有以下三种情况：

（一）$F>F_{0.01}$，试验因素对试验指标的影响特别显著，记为“＊＊”。

（二）$F_{0.05}<F\leq F_{0.01}$，试验因素对试验指标的影响显著，记为“＊”。

（三）$F\leq F_{0.05}$，试验因素对试验指标的影响不显著。

在例2—1中，根据 $F=\frac{S_{因}/f_{因}}{S_{误}/f_{误}}$

$$=\frac{V_{因}}{V_{误}}=\frac{22495/3}{108480/16}=1.11$$

它们的自由度为3,16。查F分布表 $\alpha=0.05$ 的F分布临界值为 $F_{0.05}(3,16)=3.24$，由于 $F<F_{0.05}$，因此说这种灯丝生产的灯泡其平均使用寿命之间没有显著性的差异。在实际工作中，通常说这个因子对试验指标的影响不显著。

根据上述，单因素试验的方差分析方法，可以归纳为一个方差分析表如表2—6。

表2—6

方差来源	离差平方和	自由度	方　差	F	显著性
因子	$S_{因}$	$f_{因}$	$V_{因}=S_{因}/f_{因}$		
误差	$S_{误}$	$f_{误}$	$V_{误}=S_{误}/f_{误}$		
总和	$S_{总}$	$f_{总}$			

例2—1的实际计算结果归纳为如下方差分析表，如表2—7。

表2—7

方差来源	离差平方和	自由度	方　差	F	显著性
因子	22495	3	7498.33	1.11	
误差	108480	16	6780		
总和	1030975	19			

六、实例

例2—2 油泵柱塞组合件收口的拉脱力与柱塞头的高H

有关，今以$H_1 = 11.7$毫米，$H_2 = 11.8$毫米，$H_3 = 11.9$毫米三种尺寸进行对比试验，各试验五次，得拉脱力P的数据如表2—8。

表2—8　　　　(单位：公斤)

塞头高＼拉脱力＼次数	1	2	3	4	5
H_1	1055	1050	1060	1045	1070
H_2	1065	1060	1070	1065	1055
H_3	1080	1065	1075	1070	1060

在这里，因素是柱塞头高，每次柱塞头高所选的尺寸表示一个水平，共三个水平。试验的目的是柱塞头高的尺寸对拉脱力P的影响是否显著？如果影响显著，在三个尺寸中取那一个最好？

解：先将原始数据化简，令：

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - 1000}{10}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m;$$

$j = 1, 2, \cdots, n$) 简化后的数据表如表2—9

表2—9

方案＼试验序号	1	2	3	4	5	$T_i = \sum_{j=1}^{5} x'_{ij}$	T_i^2	$\sum_{j=1}^{5} x'^2_{ij}$
1	5.5	5	6	4.5	7	28	784	160.5
2	6.5	6	7	6.5	5.5	31.5	992.25	199.75
3	8	6.5	7.5	7	6	35	1225	247.5
Σ						94.5	3001.25	607.75

用表2—9计算：

$$S_{总} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{mn}$$

$$= 607.75 - \frac{(94.5)^2}{3 \times 5}$$

$$= 12.4$$

$$S_{因} = \frac{\sum_{i=1}^{3} T_i^2}{5} - \frac{T^2}{3 \times 5}$$

$$= \frac{3001.25}{5} - 595.35$$

$$= 4.9$$

$$S_{误} = S_{总} - S_{因}$$

$$= 12.4 - 4.9$$

$$= 7.5$$

$$f_{总} = mn - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14$$

$$f_{因} = m - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f_{误} = m(n-1) = 3 \times (5-1) = 12$$

$$F = \frac{S_{因}/f_{因}}{S_{误}/f_{误}} = \frac{4.9/2}{7.5/12} = \frac{2.45}{0.625} = 3.92$$

显著性水平$\alpha = 0.05$时，$F_{0.05}(2,12) = 3.88$查F分布表得到临界值。

可见$F > F_{0.05}$，从而得出结论：柱塞头高H的尺寸对拉脱力P的作用显著。

根据上述可列出方差分析表2—10。

表2—10

方差来源	离差平方和	自由度	方差	F	$F_{0.05}(2,12)$	显著性
因子	4.9	2	2.45	3.92	3.88	*
误差	7.5	12	0.625			
总和	12.4	14				

在已知柱塞头高的尺寸作用显著之后，还可进一步考察，在三个高度尺寸中采用那一个好？由原数据知道，

$\overline{P}_1=\frac{1}{5}(1055+1050+1060+1046+1070)=1065$公斤，

$\overline{P}_2=1063$公斤，$\overline{P}_3=1070$公斤，即H取$H_3=11.9$毫米时，平均拉脱力较高，故从提高拉脱力的要求考虑柱塞头高以取11.9毫米为好。

第二节　双因素试验的方差分析

在我们掌握了单因素试验的方差分析后，就不难理解多因素试验的方差分析，对于多因素试验，我们仅对双因素试验的方差分析作以介绍。

两个因素的方差分析，其基本思想与单因素的方差分析相类似，关键在于如何把总的离差平方和进行分解，同时也必须指出的是，在多因素试验情形下，由于分组方式不同，分析和计算的程序也就不同。在此只对交叉方式进行分组：

不考虑交互作用时的两个因素的方差分析；

考虑交互作用时的两个因素的方差分析，进行讨论。

一、交叉方式分组不考虑交互作用时的两个因素的方差分析

在二因素试验的情况下，来考察因素对指标的作用是否显著。

设有A、B两个因素，因素A分为1，2，…，j，…n共n个水平，因素B分为1，2，…，i，…m共m个水平，这样，因素A与B共有m×n种不同的水平配合。我们对于每一种水平配合进行一次试验，由A_j（j＝1，2，…，n）与B_i（i＝1，2，…，m）搭配所得的试验数据记为x_{ij}，则m×n次试验所得数如表2—11所示。

表2—11

因素B	因素A A_1	A_2	…	A_j	…	A_n	行和数	行平均数
B_1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1j}	…	X_{1n}	$T_{1.}$	$\bar{X}_{1.}$
B_2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2j}	…	X_{2n}	$T_{2.}$	$\bar{X}_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_i	X_{i1}	X_{i2}	…	X_{ij}	…	X_{in}	$T_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_m	X_{m1}	X_{m2}	…	X_{mj}	…	X_{mn}	$T_{m.}$	$\bar{X}_{m.}$
列和数	$T_{.1}$	$T_{.2}$	…	$T_{.j}$	…	$T_{.n}$	T	
列平均数	$\bar{X}_{.1}$	$\bar{X}_{.2}$	…	$\bar{X}_{.j}$	…	$\bar{X}_{.n}$		$\bar{\bar{x}}$

上表各符号的含义如下：

$$T_{.j}=\sum_{i=1}^{m}x_{ij},\quad T_{i.}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$$

$$T=\sum_{j=1}^{n}T_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{m}T_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}$$

$$\bar{x}_{\cdot j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\frac{1}{m}T_{\cdot j}$$

$$\bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\frac{1}{n}T_{i\cdot}$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{\cdot j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\frac{T}{N}$$

根据上表进行方差分析的理论依据，就是假设A，B两因素对试验结果没有影响，那么$m\times n$个观察值x_{ij}，就是来自同一正态总体的同一个样本的随机变量，各个x_{ij}之间的差异，是纯随机因素所产生的随机误差，从而各列间的平均数$\bar{x}_{\cdot j}$应是相等的，同等总体平均$\bar{x}$，各行间的平均数$\bar{x}_{i\cdot}$也应相等，均等于总体平均数$\bar{x}$，如有差异也是随机误差。假如两个因素对试验结果有影响，则表现在各列平均数$\bar{x}_{\cdot j}$之间和各行平均数$\bar{x}_{i\cdot}$之间，就有明显的差异，除随机误差之外，还包含了条件误差，这时就不能认为各个观察值x_{ij}是来自同一正态总体的样本的随机变量了。通过方差分析，就能对统计假设是否可信，作出一定可靠程度的判断。

双因素交叉分组试验的方差分析步骤如下：

（一）离差平方和的划分

$m\times n$个观察值x_{ij}对总体平均数$\bar{x}$的离差平方总和用S表示，并可以分解为下面三个部分，分别用S_A，S_B和S_e（随机误差平方和）表之，则得：

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x})^{2}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}[(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})+(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})+(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})]^{2}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^{2}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^{2}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^{2}+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})$$

$$+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})$$

$$+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})$$

上式中的3个2倍交叉乘积项均等于0。例如：

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}[(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot})-(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})]\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})$$

$$=[\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot})-\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})]\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})$$

$$=[n(x_{i\cdot}-\bar{x}_{i\cdot})-n(\bar{x}-\bar{x})][m(\bar{x}-\bar{x})]=0$$

同理，证明其他两个2倍交叉项乘积也都等于0。得原式为：

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x})^{2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

$$+ n \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 + m \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

则令：

$$S_e = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

为随机误差的平方和。

$$S_A = m \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

为因素A各水平间，即各列间的离差平方和。

$$S_B = n \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2$$

为因素B各水平间，即各行间的离差平方和。即：

$$S = S_e + S_A + S_B$$

（二）离差平方和的简算法

按照上式计算S，S_e，S_A和S_B各离差平方和，当离差的有效位数较多时，计算工作量较大，因此需要简化。

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_{ij}^2 - 2\bar{x}x_{ij} + \bar{x}^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 - 2\bar{x} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 - 2mn\bar{x}^2 + mn\bar{x}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 - mn\bar{x}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{mn} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$S_A = m\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2 = m\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{\cdot j}^2 - 2\bar{x}\bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}^2)$$

$$= m\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{\cdot j}^2 - m\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{\cdot j}\cdot 2\bar{x} + m\sum_{j=1}^{n}\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}T_{\cdot j}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$S_B = n\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}T_{i\cdot}^2 - \frac{T^2}{N}$$

$$S_e = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}T_{\cdot j}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}T_{i\cdot}^2 + \frac{T^2}{N}$$

（三）各离差平方和相应的自由度离差平方总变动的自由度$f_{总} = m \times n - 1 = N - 1$；

相应于因素A的各列自由度$f_A = n - 1$；

相应于因素B的各行自由度$f_B = m - 1$；

误差平方和的自由度，$f_e = f_{总} - f_A - f_B = (n-1)(m-1)$

（四）方差的计算

将各离差平方和与其相应的自由度相比就可求得列间、行间和误差的方差。即：

列间$V_A = S_A/f_A = m\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2/(n-1)$

行间$V_B = S_B/f_B = n\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2/(m-1)$

误差$V_e = S_e/f_e = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2/(n-1)(m-1)$

（五）F值的计算和F检验

双因素试验的F值计算和F检验与单因素试验相同，只不过就列间和行间分别计算F值和F检验。

双因素A试验的显著性检验，是因素A各水平间即各列间的方差对误差的方差之比。即：

$$F_A = \frac{V_A}{V_e}$$

V_A与V_e是相互独立的。F_A满足$f_A = n-1$，$F_e = (n-1)(m-1)$的F分布。V_A表示因素各水平间平均数的差异，除随机误差外，还可能包含由于因素A的影响而产生的误差；V_e表示纯随机误差。二者相比的F_A值若接近于1，就表示V_A与V_e并无较大区别，V_A只能认为是由随机误差构成，而不包含因素A的影响所产生的误差。如果F_A值远大于1，超过了显著性水平α所对应的临界值Fα，就有根据地认为V_A包含了由于因素A的影响而产生的误差。

同样道理，对因素B试验的显著性检验，是因素B各水平间，即各行间的方差对误差的方差之比。即：

$$F_B = \frac{V_B}{V_e}$$

V_B与V_e也是相互独立的，F_B遵循$f_B = m-1$，$f_e = ($n

－1）（m－1）自由度的F分布。按此自由度从F表上查得对应于给定的显著性水平α的临界值Fα，用F_B与Fα相比较即可。

（六）方差分析表

将上述计算的程序，归纳为双因素一次试验方差分析表2—12。

表2—12

方差来源	离差平方和	自由度	均方	F值	显著性
列间	$S_A=m\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2$	$f_A=n-1$	$V_A=\frac{S_A}{f_A}$	$F_A=V_A/V_e$	
行间	$S_B=n\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2$	$f_B=m-1$	$V_B=\frac{S_B}{f_B}$	$F_B=V_B/V_e$	
误差	$S_e=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x})^2$	$f_e=(n-1)(m-1)$	$V_e=\frac{S_e}{f_e}$		
总和	$S_总=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x})^2$	$f_总=nm-1$			

例3 某厂对生产的高速钢铣刀进行淬火工艺试验，考察等温温度，淬火温度两个因素对硬度的影响。今等温温度，淬火温度各取三个水平：

等温温度（A）：$A_1=280℃$，$A_2=300℃$，$A_3=320℃$。

淬火温度(B)：$B_1=1210℃$，$B_2=1235℃$，$B_3=1250℃$。试验测得平均硬度（HRC）值如表2—13。

试问两种温度对硬度影响是否显著?

表2—13

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	64	66	68
A_2	66	68	67
A_3	65	67	68

为了计算方便，我们将所有的观测值都减去66。数据经过这样的变换并不改变方差分析的结果。因为在方差分析中，我们关心的只是观测值的差异，因此当每个观测值都加（或减）一个相同的常数时，各离差平方和不变，如果每一观测值同时乘（或除）一个常数K，则各离差平方和同时扩大（或缩小）K^2倍，从而F值不变，因此不影响分析的结果。

对表2—13中的数据经过上述处理后得到表2—14。

表2—14

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	行和数$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	行平均$\bar{x}_{i\cdot}$
A_1	-2	0	2	0	0
A_2	0	2	1	3	1
A_3	-1	1	2	2	$\frac{2}{3}$
列和数$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$	-3	3	5	5	
列平均$\bar{x}_{\cdot j}$	-1	1	$\frac{5}{3}$		$\bar{x}=\frac{5}{9}$

计算及分析的具体步骤如下（m = 3，n = 3）：

第一步，计算各行的和数$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$，行平均数$\bar{x}_{i\cdot}$，各列的和数$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$，列平均数$\bar{x}_{\cdot j}$，总和$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$及总平均数$\bar{x}$。结果如表2—14的底下两行与右边两列所示。

第二步，计算修正项。

$$CT=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\right)^2/nm=\frac{5^2}{9}=\frac{25}{9}$$

第三步，计算全体观测值的平方和及总（离差）平方和。

全体观测值平方和为：

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^2=(-2)^2+0^2+2^2+0^2+2^2+1^2+(-1)^2+1^2+2^2=19$$

总（离差）平方和为：

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^2-CT=19-\frac{25}{9}=16.22$$

第四步，计算各行平均数的平方和及行间（离差）平方和。

各行平均数平方和为：

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^2=\frac{1}{3}\left[0^2+3^2+2^2\right]=\frac{13}{3}$$

行间（离差）平方和为：

$$S_A=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^2-CT=\frac{13}{3}-\frac{25}{9}=\frac{14}{9}=1.56$$

第五步，计算各列平均数的平方和及列间（离差）平方和。

各列平均数的平方和为：

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\right)^2=\frac{1}{3}\left[(-3)^2+3^2+5^2\right]=\frac{43}{3}$$

列间（离差）平方和为：

$$S_B=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\right)^2-CT=\frac{43}{3}-\frac{25}{9}=11.56$$

第六步，计算误差平方和。

$S_e=S-S_A-S_B=16.22-1.56-11.56=3.1$

等七步，计算各均方值以及关于行（因素A），列（因素B）的F值，列出方差分析表，如表2—15所示。

$F_A=\frac{V_A}{V_e}$，　$F_B=\frac{V_B}{V_e}$

$f=nm-1=9-1=8$

$f_A=m-1=3-1=2$；$f_B=n-1=3-1=2$

$f_e=(m-1)(n-1)=2\times2=4$

$\therefore F_A=\frac{V_A}{V_e}=\frac{2\times1.56}{3.1}=1.01$

$F_B=\frac{V_B}{V_e}=\frac{2\times11.56}{3.1}=7.46$

表2—15

方差来源	离差平方和	自由度	均　方	F	显著性
A因素（行）	1.56	2	1.56/2	1.01	
B因素（列）	11.56	2	11.56/2	7.46	*
误　差	3.1	4	3.1/4		
总　和	16.22	8			

第八步，查F分布表。

查F分布表$\alpha=0.05$的F分布临界值为$F_{0.05}(2,4)=6.94$，与F_A，F_B进行比较，得出结论：在所选的水平范围内，等温温度的水平变化对硬度无显著影响，而淬火温度的

水平变化对硬度则影响显著。

二、交叉方式分组考虑交互作用时的两个因素方差分析

上面讨论的两个因素之间没有相互影响的情况。但是在实际中有时我们会遇到相反的情形，即两个因素的影响与它们不同水平的搭配是有关系的，这种因素间联合搭配对试验指标所起的作用称为交互作用。下面讨论在考虑交互作用情况下，如何进行两个因素的方差分析。

当要考虑因素间的交互作用时，两因素间的每一种水平搭配（i，j）只作一次试验是不够的。因为当试验无重复时，交互作用和试验误差混在一起，就无法分析出交互作用的大小。事实上，交互作用也是一种平均现象，即搭配（i，j）虽有最好的结果，由于存在有试验误差，未必每次都产生同样好的效果，故需从多次试验中平均出交互作用。现在我们对A、B两因素的每一种水平搭配进行d次试验。令x_{ijk}表示第i行第j列内的第k次试验值，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$；$k=1,2,\cdots,d$。

则有：

$$\bar{x}_{ij\cdot}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}$$

$$\bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{nd}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}$$

$$\bar{x}_{\cdot j}=\frac{1}{md}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}$$

$$\bar{x}=\frac{1}{nmd}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}$$

这些符号的意义是明显的：

$\bar{x}_{ij.}$为第i行第j列各试验值的平均值；

$\bar{x}_{i.}$为第i行所有各个试验值的平均值；

$\bar{x}_{.j}$为第j列所有各个试验值的平均值；

$\bar{x}$为全部试验值的总平均值。与前类似，我们可把总离差平方和分解为四项之和。即：

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}(x_{ijk}-\bar{x})^2$$

$$=md\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2+nd\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2$$

$$+d\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x})^2$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2$$

$$=S_A+S_B+S_{A\times B}+S_e$$

上式右端四项表示的意义分别是：

S_A反映了因素A对试验结果的影响；S_B反映了因素B对试验结果的影响；$S_{A\times B}$反映了因素A和B的交互作用对试验结果的影响；S_e反映了试验误差。其自由度分别为：

S的自由度为$f=nmd-1$

S_A的自由度为$f_A=m-1$

S_B的自由度为$f_B=n-1$

$S_{A\times B}$的自由度为$f_{A\times B}=(n-1)(m-1)$

S_e的自由度为$f_e=f-f_A-f_B-f_{A\times B}=nm(d-1)$

在考虑两个因素的交互作用时，要求每种试验条件A_i、B_j下的试验至少重复两次以上，否则就无法将交互作用从试

验误差项中分析出来。

设每种试验条件重复d次，记 A_iB_j 的第k次观察值为x_{ijk}，则它可表示成：

$x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+I_{ij}+\varepsilon_{ijk}$ $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n; k=1, 2, \cdots, d。)$

其中α_i，β_j分别是因素A，B的主效应；而I_{ij}则是A与B的交互效应；ε_{ijk}仍是试验误差，是相互独立的，均值为0，方差为σ^2的正态变量。

为检验因素A，B的主效应及交互作用是否显著，仍用F检验。但需要特别指出的是，在现在的情况下，F统计量的构成并不总是等于所考察的效应的均方与误差均方的比。虽然α_i，β_j都是固定时这个规律仍不变，但在随机效应模型和混合型情况下，对全部或一个主效应的检验，分母应用交互项的均方$V_{A\times B}$代替误差均方。详见方差分析表，如表2—16。

因此，当检验因素A的主效应时，要看B的效应β_j的性质，若β_j是固定的，则$F_A=V_A/V_e$；若β_j是随机的，则$F_A=V_A/V_{A\times B}$。对B的主效应的检验也有同样的规则，即视A的效应α_i的性质而决定。

在具体计算中，各离差平方和可按下面的公式计算较方便：

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x^2_{ijk}-CT$$

$$S_A=\frac{1}{nd}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2-CT$$

$$S_B=\frac{1}{md}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2-CT$$

表2—16

方差来源	离差平方和	自由度	均方	F
A	$S_A=md\sum\limits_{i=1}^{m}(\bar{X}_{i\cdot}-\bar{x})^2$	$f_A=m-1$	$V_A=S_A/f_A$	$\frac{V_A}{V_e}$（若B固定） $\frac{V_A}{V_{A\times B}}$（若B随机）
B	$S_B=nd\sum\limits_{j=1}^{n}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2$	$f_B=n-1$	$V_B=S_B/f_B$	$\frac{V_B}{V_e}$（若A固定） $\frac{V_B}{V_{A\times B}}$（若A随机）
A×B	$S_{AB}=d\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2$	$f_{A\times B}=(n-1)(m-1)$	$V_{A\times B}=S_{A\times B}/f_{A\times B}$	$\frac{V_{A\times B}}{V_e}$
误差	$S_e=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{d}(X_{ijk}-\bar{X}_{ij})^2$	$f_e=nm(d-1)$	$V_e=S_e/f_e$	
总和	$S=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{d}(X_{ijk}-\bar{x})^2$	$f=mnd-1$		

$$S_{A\times B}=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2-\frac{1}{nd}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2$$

$$-\frac{1}{md}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2+CT$$

$$S_e=S-S_A-S_B-S_{A\times B}$$

其中

$$CT=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2/nmd$$

例4 在某橡胶配方中，考虑了三种不同的促进剂，四种不同份量的氧化锌。同样的配方重复一次，测得300%定强，如表2—17所示。A代表促进剂，B代表氧化锌。

问：促进剂，氧化锌以及它们的交互作用对定强有无影响？

表2—17

B / A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	31，33	34，36	35，36	39，38
A_2	33，34	36，37	37，39	38，41
A_3	35，37	37，38	39，40	42，44

方差分析的计算及分析步骤如下

（m＝3，n＝4，d＝2）：

第一步，将表2—17中的每个观测值减去常数37，计算每种试验条件（每小格中两次观测值）的和 $\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}$，行和

$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} x_{ijk}$，列和$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d} x_{ijk}$及总和 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} x_{ijk}$，如下面表2—18所示。

表2—18

B / A	B_1	B_2	B_3	B_4	行和
A_1	(-6,-4)-10	(-3,-1)-4	(-2,-1)-3	(2, 1) 3	-14
A_2	(-4,-3)-7	(-1, 0)-1	(0, 2) 2	(1, 4) 5	-1
A_3	(-2, 0)-2	(0, 1) 1	(2, 3) 5	(5, 7)12	16
列　和	-19	-4	4	20	1

第二步，计算修正项。

$$CT = T^2/nmd = \frac{1^2}{4\times 3\times 2} = \frac{1}{24} \doteq 0$$

第三步，计算全部观测值的平方和及总离差平方和。

全部观测值平方和为：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} x^2_{ijk} = (-6)^2+(-4)^2+(-3)^2+(-1)^2+\cdots$$
$$+2^2+3^2+5^2+7^2$$
$$=36+16+9+1+\cdots+4+9+25+49 = 211.0$$

总离差平方和为：

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} x^2_{ijk} - CT = 211.0 - 0 = 211.0$$

第四步，计算行平均数的平方和及行间离差平方和。

行平均数平方和为：

$$\frac{1}{nd}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2=\frac{1}{8}[(-14))^2+(-1)^2+16^2] \doteq 56.6$$

行间离差平方和为：

$$S_A=\frac{1}{nd}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2-CT=56.6-0=56.6$$

第五步，计算列平均数的平方和及列间离差平方和。

列平均数平方和为：

$$\frac{1}{md}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}x_{ijK}\right)^2=\frac{1}{6}[(-19)^2+(-4)^2+4^2+20^2]=132.2$$

列间离差平方和为：

$$S_B=\frac{1}{md}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2-CT=132.2-0=132.2$$

第六步，计算各小格平均数的平方和及交互作用平方和。

各小格平均数平方和为：

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2=\frac{1}{2}[(-10)^2+(-7)^2+(-2)^2$$

$$+\cdots+3^2+5^2+12^2]=\frac{1}{2}\times 387=193.5$$

交互作用平方和为：

$$S_{A\times B}=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2-\frac{1}{nd}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2$$

$$-\frac{1}{md}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}x_{ijk}\right)^2+CT$$

$$=193.5-56.6-132.2+0=4.7$$

第七步，计算误差平方和。

表 2—19

方差来源	离差平方和	自由度	均方	F	显著性
A	56.6	$f_A=2$	28.3	19.4	* *
B	132.2	$f_B=3$	44.1	30.2	* *
A×B	4.7	$f_{A\times B}=6$	0.8	0.55	
误差	17.5	$f_e=12$	1.46		
总和	211.0	23			

由方差分析表看出，促进剂种类和氧化锌份量对定强均产生特别显著的影响，且两者相比较氧化锌的影响更大些，而它们之间的交互作用均方很小，比误差项还小，因此可以认为没有交互作用，相应的平方和只不过是误差的一种反映，可将该项和误差项合并，相应的自由度也合并，以提高分析的精度，这在方差分析中是常用的一种技巧，由此可得下面表 2—20的方差分析表。

表 2—20

方差来源	离差平方和	自由度	均方	F	临界值	显著性
A	56.6	2	28.3	22.8	$F_{A0.01}=6.01$	* *
B	132.2	3	44.1	35.4	$F_{B00.1}=5.09$	* *
误差	22.2	18	1.24			
总和	211.0	23				

$$S_e = S - S_A - S_B - S_{A\times B}$$
$$= 211.0 - 56.6 - 132.2 - 4.7 = 17.5$$

第八步，确定S_A，S_B，$S_{A\times B}$和S_e的自由度。

$f_A = m-1 = 3-1 = 2$，$f_B = n-1 = 4-1 = 3$，

$f_{A\times B} = (n-1)(m-1) = 6$ $f_e = nm(d-1) = 4\times3\times1 = 12$

第九步，求出有关的均方，计算F值。

在此例中促进剂及氧化锌所取的水平数都是固定的，因此计算F值时是将相应的均方与误差均方相除，详见方差分析表 2—19所示。

$$F_A = \frac{V_A}{V_e} = \frac{S_A/f_A}{S_e/f_e} = \frac{56.6/2}{17.5/12} = 19.4$$

$$F_B = \frac{V_B}{V_e} = \frac{132.2/3}{17.5/12} = 30.2$$

$$F_{A\times B} = \frac{V_{A\times B}}{V_e} = \frac{4.7/6}{17.5/12} = 0.55$$

如果$\alpha = 0.01$，则查：$F_{0.01}(2,12) = 6.93$

$F_{0.01}(3,12) = 5.95$

$F_{0.01}(6,12) = 3.00$

第三章　水平数不同的全因素试验

前面已经介绍了利用正交表安排水平数相同的多因素试验。本章通过实例介绍多指标试验，以及不同水平数的全因素试验及统计分析。数据结构是多因素试验设计及统计分析的基本前提。弄清数据结构不仅可以从理论搞清多因素试验的有关问题，而且可以解决实际工作中经常遇到的效应估计及缺失数补偿等问题。这些问题是本章叙述的主要内容。

第一节　多指标试验

在实际生产过程中不仅要考察某一个指标，而且往往要同时考察几个指标。要使几个指标都能同时达到所要求的生产条件或工艺方案。这种试验指标多于一个指标时称为多指标试验。它的分析计算方法与单指标时一样。只是要对每个指标独自进行分析计算。从所得的几个最优水平中经过综合平衡选出一个较好的水平组合在一起。然后通过必要的试验再应用到生产实际中去。

例3.1　某厂生产的1502，1503和0070号高速钢叶片立铣刀，经淬火后质量不稳定。几项性能指标满足不了加工要求。使用时产生了打刀、崩齿等现象，刀具寿命低。这几种型号的高速钢立铣刀的化学成为$W_6M_5V_2$。原来的淬火工艺得到的机械性能如下：

表3—1

抗弯强度 σ_b (公斤/毫米²)	冲击韧性 a_k (公斤/毫米²)	挠　度 f (毫米)	硬　度 HRC
280～300	2.5～3	2～2.5	66～68

决定采用贝氏体等温淬火工艺，为寻找最好工艺参数，要做如下试验：

1、淬火温度对硬度、强度和韧性的影响；

2、等温温度对硬度、强度和韧性的影响；

3、等温时间对硬度、强度和韧性的影响。

试验指标为：冲击韧性(公斤/毫米²)，挠度（毫米），抗弯强度（公斤/毫米²），（以上三个试验指标数值愈高愈好）和硬度（HRC＝66）。

影响上述试验指标的因素与水平如表3—2所示。

表3—2

水平＼因素	A 等温温度 ℃	B 淬火温度 ℃	C 等温时间 小时
Ⅰ	280	1210	1
Ⅱ	300	1235	2
Ⅲ	320	1250	3

这是三水平三因素四指标的试验问题，选取 $L_9(3^4)$ 进行试验。表头设计如表3—3所示。

表3—3

因　素	A	B	C	
列　号	1	2	3	4

试验结果及分析计算如表3—4和表3—5所示。

表3—4

列号 / 试号	A B C 1 2 3 4	冲击韧性 a_k公斤/毫米²	挠度 f毫米	抗弯强度 (σ_b-400)	硬度 (HRC−66)
1	$L_9(3^4)$	4.7	4.7	73	−1
2		3.85	4.5	40	0
3		2.48	3.5	−73	1
4		2.93	4.0	−26	0
5		4.60	4.3	−3	1
6		3.20	3.8	−23	0.5
7		3.30	4.5	27	−1
8		4.27	4.3	2	0
9		2.57	3.5	−52	1
	Σ	31.9	37.1	−36	1.5

从极差值R的大小可知，因素B即淬火温度的水平变化对四个指标的影响都是很大的。因素C即等温时间对挠度的影响较小，对其余三个指标的影响次于因素B。因素A即等温温度对各项指标的影响最小。所以，因素B的水平应慎重选取。对抗弯强度来说选取B_1较为有利，对其余指标均以选取B_2较为有利。由于因素A及C对指标的影响不太大，主要应考虑工艺实现的方便，故选取A_1C_1水平。经过上述分析后，高速钢淬火工艺方案为：

淬火温度（B_1—B_2）：1210℃—1235℃

等温温度　C_1　：　280℃

等温时间　A_1　：　1小时

经工艺验证后，抗弯强度σ_b提高50%；冲击韧性提高了45%；挠度提高45%；寿命提高7倍。

表3—5

指标 / 列号 / 水平	冲击韧性				挠度				抗弯强度				硬度			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Ⅰ	11.03	10.93	12.17	11.87	12.7	13.2	12.8	12.5	39	74	52	18	0	−2	−0.5	1
Ⅱ	10.73	12.72	9.35	10.35	12.1	13.1	12.0	12.8	−52	39	−38	44	1.5	1	1	−0.5
Ⅲ	10.14	8.25	10.38	9.68	12.3	10.8	12.3	11.8	−23	−149	−50	−98	0	2.5	1	1
R	0.89	4.47	2.82	2.19	0.6	2.4	0.8	1.0	91	223	102	148	1.5	4.5	1.5	1.5

第二节　不同水平的全因素试验

在生产实践中，由于设备、原料或生产条件等的限制。使得在考虑试验方案时，某些因素对水平个数的选择受到限制，而比其它因素的水平数少。而有的试验项目，对某些因素又要做重点考虑。因而，要比其它因素多选几个水平，这就产生了水平数不同的试验。

例3.2　某化工厂为了探索从矿石中提取稀土元素的工艺方案。从以往的生产实践中知道酸分解是关键工序。为了提高提取率，用正交表寻求分解的最优工艺条件。因素与水平安排如表3—6所示。

表3—6

因素 / 水平	酸浓度 (N)	分解时间 (小时)	分解温度	加酸方法
Ⅰ	3	4	甲	一次加入
Ⅱ	4	1	乙	
Ⅲ	6	2	丙	两次加入
Ⅳ	10	3	丁	

从表3—6看出，前三个因素是四水平的，后一个因素是两水平的。选用正交表时就要根据因素和水平的具体条件选混合水平的正交表安排试验。常用的混合水平正交表有 $L_8(4\times 2^4)$，$L_{16}(4\times 2^{12})$，$L_{16}(4^3\times 2^6)$，$L_{16}(4^4\times 2^3)$，$L_{27}(9\times 3^9)$ 等。本例四水平因素有三个，二水平因素有一个。因而，$L_{16}(4^4\times 2^3)$ 和 $L_{16}(4^3\times 2^6)$ 都可以选用。我们选用 $L_{16}(4^4\times 2^3)$ 来安

排试验。

试验结果分析计算大体上和水平数相同的方法相似。但由于因素的水平数不同。所以应该分别计算相同水平的平均值，并按计算极差R′来比较因素的显著程度。

$$R' = \sqrt{r} \times R \times d$$

式中：R′——计算极差；

r ——相同水平数；

R ——直接极差；

d ——折算系数。

为了计算计算极差R′，下面给出折算系数的计算表格，如表3—7所示。

表3—7

折算系数 d	0.71	0.52	0.45	0.40	0.37	0.35	0.34	0.32	0.31
相同水平数	2	3	4	5	6	7	8	9	10

由计算公式和折算系数表可计算R′如下：

$$R_a' = \sqrt{r_a} \times R_a \times d_a = \sqrt{4} \times 1.05 \times 0.45 = 0.945$$

$$R_b' = \sqrt{r_b} \times R_b \times d_b = \sqrt{4} \times 0.29 \times 0.45 = 0.26$$

$$R_c' = \sqrt{r_c} \times R_c \times d_c = \sqrt{4} \times 0.27 \times 0.45 = 0.24$$

$$R_d' = \sqrt{r_d} \times R_d \times d_d = \sqrt{8} \times 0.35 \times 0.35 = 0.35$$

R′的计算结果如表3—8所示。由此可见因素的显著次序是：ADBC

水平的显著次序是：$A_3D_2B_4C_1$

酸分解的最好工艺条件是：

两次加酸

酸的浓度6 N

分解时间 3 小时

分解温度为甲（即90℃—100℃）

表3—8

列号 / 试验号	1 (a) 酸浓度	2 (b) 分解时间	3 (c) 分解温度	4 (d) 加酸方法	试验指标（克）提取率
1	1	1	1	1	9.08
2	1	2	2	1	9.10
3	1	3	3	2	8.96
4	1	4	4	2	9.41
5	2	1	2	2	9.36
6	2	2	1	2	8.45
7	2	3	4	1	8.19
8	2	4	3	1	9.08
9	3	1	3	1	9.08
10	3	2	4	1	9.64
11	3	3	1	2	10.72
12	3	4	2	2	9.85
13	4	1	4	2	9.14
14	4	2	3	2	9.24
15	4	3	2	1	8.86
16	4	4	1	1	9.26
Ⅰ	36.55	36.66	37.51	72.29	
Ⅱ	35.08	36.43	37.17	75.13	
Ⅲ	39.29	36.73	36.36		
Ⅳ	36.50	37.60	36.38		
Ⅰ/4	9.14	9.17	9.36	Ⅰ/8 9.04	
Ⅱ/4	8.77	9.11	9.26	Ⅱ/8 9.39	
Ⅲ/4	9.82	9.18	9.09		
Ⅳ/4	9.12	9.40	9.10		
R	1.05	0.29	0.27	0.35	

此工艺条件经生产验证后，效果很好，稀土元素的提取率达到98%。

不同水平数的全因素试验除了采用混合正交表试验外，也可以采用拟水平试验。

第三节　正交试验设计中的效应估计

前面我们已经说明如何利用正交表安排试验，并通过综合比较的直观分析法和方差分析选出最优的生产条件（或工艺配方）。现在我们要说明这样一个问题。当确定最优生产条件（或工艺配方）之后，在未正式投入大批量生产之前，能否从理论上估计出这种最优生产方案达到的稳定的生产指标 y 的数值。我们可以通过简单的数学计算方法，即求出工程平均 $\mu_{优}$ 来得到期望的 y 值。

为此，我们还必须进一步说明效应的概念。我们已经知道，试验数据的一般平均为：

$$\mu = \frac{数据总和}{数据总个数}$$

一般平均 μ 是比较各因素各水平差别的基础。要了解某一个因素某一个水平比一般平均多了多少或少了多少，只要计算这个因素在该水平下数据平均值与一般平均的偏离就可以了。这个偏离就称为因素在该水平下的效应，即：

因素某水平下的效应＝因素某水平下数据平均值－一般平均。

效应一般用小写英文字母加数字足标表示。英文字母表示是一个因素，足标表明是一个水平。例如：a_3表明A因素第三水平的效应。d_2表示D因素第二水平的效应……等。

例1.1中一般平均是：

其数据总和$T=184$

一般平均 $\mu=\frac{T}{9}=\frac{184}{9}=20.9$

所以

A_1的效应是$a_1=\frac{\mathrm{I}_A}{3}-\frac{T}{9}=\frac{52.7}{3}-\frac{184}{9}=-2.9$

A_2的效应是$a_2=\frac{\mathrm{II}_A}{3}-\frac{T}{9}=\frac{62.5}{3}-\frac{184}{9}=0.4$

A_3的效应是$a_3=\frac{\mathrm{III}_A}{3}-\frac{T}{9}=\frac{68.8}{3}-\frac{184}{9}=2.5$

B_1的效应是$b_1=\frac{\mathrm{I}_B}{3}-\frac{T}{9}=\frac{62}{3}-\frac{184}{9}=0.22$

B_2的效应是$b_2=\frac{\mathrm{II}_B}{3}-\frac{T}{9}=\frac{63.2}{3}-\frac{184}{9}=0.62$

B_3的效应是$b_3=\frac{\mathrm{III}_B}{3}-\frac{T}{9}=\frac{58.8}{3}-\frac{184}{9}=-0.84$

C_1的效应是$c_1=\frac{\mathrm{I}_C}{3}-\frac{T}{9}=\frac{56.3}{3}-\frac{184}{9}=-1.68$

C_2的效应是$c_2=\frac{\mathrm{II}_C}{3}-\frac{T}{9}=\frac{62}{3}-\frac{184}{9}=0.22$

C_3的效应是$c_3=\frac{\mathrm{III}_C}{3}-\frac{T}{9}=\frac{65.7}{3}-\frac{184}{9}=1.46$

从以上计算的结果中，我们同样可以发现：

$a_1+a_2+a_3=-2.9+0.4+2.5=0$

$b_1+b_2+b_3=0.22+0.62-0.84=0$

$c_1+c_2+c_3=-1.68+0.22+1.46=0$

如果再有其它因素D、E等的效应也算出来，也具有同样的性质。实际上，如果在正交试验设计中各因素水平数是相同的，因而各因素每个水平下的试验数据个数也是相等的，这时就应当有：

$$一般平均\mu = \frac{任一因素各水平数据平均值之和}{因素的水平数}$$

因此，每个因素各水平效应之和总应等于0，这和上节中的理论推论是一致的。下面我们介绍用工程平均的方法和最小二乘方法所进行的效应估计。

一、工程平均

从效应的概念，便可推算出工程平均了。那么，什么是工程平均呢？

某一试验条件下影响较大的因素相应水平的效应以及数据一般平均统统加起来，叫做在这个条件下的工程平均。由于每一个效应都表示因素取定某一个水平时使数据比一般平均多了多少或少了多少。所以，工程平均就说明了所有重要因素都取定一个水平以后，试验数据在一般平均的基础上变成了什么。因此，可以用它来估计这个试验条件下指标的数值y是很自然的。应当指出，在计算工程平均时，那些次要因素对指标的影响很小，它们的效应可以忽略。工程平均的计算公式是：

某试验条件下的工程平均＝一般平均＋主要因素在该条件下出现水平的效应。

在例1．1中A、B因素是影响较大的因素，所以最优生产条件：$A_3C_3B_2$条件的工程平均$= \mu + a_3 + c_3$

$$= 20.4 + 2.5 + 1.46 = 24.36$$

我们把最优工程平均写成$\mu_{优}$，它就是在最优生产条件（或工艺配方）下的试验指标的理论估计值。用$\mu_{优}$就可以在正式投产前估计正交试验设计的试验结果。通过正交设计可以选出最优生产条件，通过工程平均的计算可以看出这个试验能否达到预期的目的。然而，这毕竟是理论上的估计。还必须通过必要的试验才能最后应用于生产中去。

二、最小二乘方法

除了用工程平均进行正交试验设计效应的估计外。我们还可以用最小二乘方的方法来估计一般平均以及各因素和交互作用的效应。

我们利用例1.2，选用正交表$L_8(2^7)$，其表头设计及试验结果如表3—12所示。（以表观质量试验结果综合评分为主）。

表头设计及试验结果如表3—9所示。

表3—9

因素	A	B	A×B	C	A×C	B×C	D	试验结果
试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	（表观质量）
1	1	1	1	1	1	1	1	50
2	1	1	1	2	2	2	2	50
3	1	2	2	1	1	2	2	45
4	1	2	2	2	2	1	1	45
5	2	1	2	1	2	1	2	40
6	2	1	2	2	1	2	1	50
7	2	2	1	1	2	2	1	90
8	2	2	1	2	1	1	2	85

我们可以参照例3.4某化学反应的产量，写出如下的表观质量的数据结构式：

$$y_i = m_i + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, 8)$$

本例"化铣"的试验结果——表观质量y_i除了受因素A、B、C、D的影响之外。还受到$A \times B$，$A \times C$，$B \times C$的交互作用的影响。因而，我们可以把m_i分解为各因素的效应及交互作用效应的线性和。设因素A的两个水平的效应为a_1，a_2（它们满足关系式$a_1 + a_2 = 0$）；因素B的两个水平的效应b_1，b_2（满足关系式$b_1 + b_2 = 0$）；因此，C的两个水平的效应为c_1，c_2（满足关系式$c_1 + c_2 = 0$）；$A \times B$的效应$(ab)_{ij}$〔满足关系式$(ab)_{11} + (ab)_{12} = (ab)_{21} + (ab)_{22} = (ab)_{11} + (ab)_{21} = (ab)_{12} + (ab)_{22} = 0$〕。由于第1号试验是在$A_1B_1C_1D_1$条件下进行的。所以$m_1$就反映了$A_1$，$B_1$，$C_1$，$D_1$这些水平的效应及$A_1B_1$交互作用的效应。即：

$$y_1 = m_1 + \varepsilon_1 = \mu + a_1 + b_1 + (ab)_{11} + c_1 + d_1 + \varepsilon_1。$$

这样对照上面的表头设计及试验计划表就可以写出y_1，$y_2 \cdots$，y_8的数据结构式见表3—10。

表3—10　**试验计划**

因素 \ 列号 \ 试验序号	A 1	B 2	C 4	D 7	试验结果 y_i
1	1	1	1	1	y_1
2	1	1	2	2	y_2
3	1	2	1	2	y_3
4	1	2	2	1	y_4
5	2	1	1	2	y_5
6	2	1	2	1	y_6
7	2	2	1	1	y_7
8	2	2	2	2	y_8

$$
\left.
\begin{aligned}
y_1 &= m_1+\varepsilon_1=\mu+a_1+b_1+(ab)_{11}+c_1+d_1+\varepsilon_1,\\
y_2 &= m_2+\varepsilon_2=\mu+a_1+b_1+(ab)_{11}+c_2+d_2+\varepsilon_2,\\
y_3 &= m_3+\varepsilon_3=\mu+a_1+b_2+(ab)_{12}+c_1+d_2+\varepsilon_3,\\
y_4 &= m_4+\varepsilon_4=\mu+a_1+b_2+(ab)_{12}+c_2+d_1+\varepsilon_4,\\
y_5 &= m_5+\varepsilon_5=\mu+a_2+b_1+(ab)_{21}+c_1+d_2+\varepsilon_5,\\
y_6 &= m_6+\varepsilon_6=\mu+a_2+b_1+(ab)_{21}+c_2+d_1+\varepsilon_6,\\
y_7 &= m_7+\varepsilon_7=\mu+a_2+b_2+(ab)_{22}+c_1+d_1+\varepsilon_7,\\
y_8 &= m_8+\varepsilon_8=\mu+a_2+b_2+(ab)_{22}+c_2+d_2+\varepsilon_8。
\end{aligned}
\right\}
\quad (3,2)
$$

从上述数据结构式（3,2）中，我们可以发现：虽然每次试验结果m_i都不一样，但它们都是一般平均μ和各因素及交互作用效应的线性和。因此，只要求出一般平均与效应的估计值，m_i的估计值也就可以获得了。

下面由数据结构式（3,2），用最小二乘方的方法来估计一般平均及各因素和交互作用的效应。

首先，设m_i的估计值为$\hat{m}_i$，我们希望所求出的$\hat{m}_i$尽量接近实测值y_i。若称实测值y_i与估计值$\hat{m}_i$之差为残差。那么要定出这样的$\hat{m}_i$，使残差$(y_i-\hat{m}_i)$尽量小。为此，我们用最小二乘方的原则，即要使残差平方和达到最小。

$$
Q=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\hat{m}_i)^2 \quad （本例中N=8）
$$

若定m_i的估计值$\hat{m}_i$就是要定μ，a_i,b_j,c_k,d_L，$(ab)_{ij}$的估计值$\hat{\mu}$，$\hat{a}_i$，$\hat{b}_j$，$\hat{c}_k$，$\hat{d}_L$，$\widehat{(ab)}_{ij}$，由于各参数间存在如下关系：

$$
\sum_{i=1}^{2}a_i=0,\quad \sum_{j=1}^{2}b_j=0,\quad \sum_{k=1}^{2}c_k=0,\quad \sum_{L=1}^{2}d_L=0,
$$

$$\sum_{i=1}^{2}(ab)_{ij}=0,(j=1,2),\quad \sum_{j=1}^{2}(ab)_{ij}=0,(i=1,2)$$

所以，它们的估计值也同样满足这些关系式，有：

$$\sum_{i=1}^{2}\hat{a}_i=0,\quad \sum_{j=1}^{2}\hat{b}_j=0,\quad \sum_{k=1}^{2}\hat{c}_k=0,\quad \sum_{L=1}^{2}\hat{d}_L=0,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\widehat{(ab)}_{ij}=0\ (j=1,2),\quad \sum_{j=1}^{2}\widehat{(ab)}_{ij}=0\ (j=1,2)。$$

为使Q达到最小，可将y_i的数据结构式（3,2）代入 $Q=\sum_{i=1}^{8}(y_i-\hat{m}_i)^2$中。然后根据求极值方法将Q分别对这些参数的估计值$\hat{\mu}$，$\hat{a}_i$，$\hat{b}_j$，$\hat{c}_k$，$\hat{d}_L$，$\widehat{(ab)}_{ij}$求偏导数，并令其为零，解方程就可以得到各数的估计值。

$$\begin{aligned}Q=\sum_{i=1}^{8}(y_i-\hat{m}_i)^2= & (y_1-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{11}-\hat{c}_1-\hat{d}_1)^2\\
&+(y_2-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{11}-\hat{c}_2-\hat{d}_2)^2\\
&+(y_3-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{12}-\hat{c}_1-\hat{d}_2)^2\\
&+(y_4-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{12}\ \ \hat{c}_2-\hat{d}_2)^2\\
&+(y_5-\hat{\mu}-\hat{a}_2-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{21}-\hat{c}_1-\hat{d}_2)^2\\
&+(y_6-\hat{\mu}-\hat{a}_2-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{21}-\hat{c}_2-\hat{d}_1)^2\\
&+(y_7-\hat{\mu}-\hat{a}_2-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{22}-\hat{c}_1-\hat{d}_1)^2\end{aligned}$$

$$+\ (y_8-\hat{\mu}-\hat{a}_2-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{22}-\hat{c}_2-\hat{d}_1)^2。$$

令 $$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\mu}}=-[2(y_1-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{11}-\hat{c}_1-d_1)$$

$$+2\ (y_2-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{11}-\hat{c}_2-\hat{d}_2)$$

$$+2\ (y_3-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{12}-\hat{c}_1-\hat{d}_2)$$

$$+2\ (y_4-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{12}-\hat{c}_2-\hat{d}_1)$$

$$+2\ (y_5-\hat{\mu}-\hat{a}_2-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{21}-\hat{c}_1-\hat{d}_2)$$

$$+2\ (y_6-\hat{\mu}-\hat{a}_2-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{21}-\hat{c}_2-\hat{d}_1)$$

$$+2\ (y_7-\hat{\mu}-\hat{a}_2-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{22}-\hat{c}_1-\hat{d}_1)$$

$$+2\ (y_8-\hat{\mu}-\hat{a}_2-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{22}-\hat{c}_2-\hat{d}_2)]=0,$$

化简得 $\sum_{i=1}^{8} y_i-8\hat{\mu}=0$，

因此，$\hat{\mu}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i=\bar{y}$。

同理，令

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_1}=-[2\ (y_1-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{11}-\hat{c}_1-\hat{d}_1)$$

$$+2\ (y_2-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_1-\widehat{(ab)}_{11}-\hat{c}_2-\hat{d}_2)$$

$$+2\ (y_3-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_2-\widehat{(ab)}_{12}-\hat{c}_1-\hat{d}_2)$$

$$+\sum(y_4-\hat{\mu}-\hat{a}_1-\hat{b}_2-(\widehat{ab})_{12}-\hat{c}_2-\hat{d}_1)]=0,$$

化简，得 $$4\hat{a}_1=y_1+y_2+y_3+y_4-4\hat{\mu},$$

即 $$\hat{a}_1=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}-\bar{y}。$$

其中y_1，y_2，y_3，y_4正好是A_1水平下的四个试验结果。因此，因素A取1水平时的效应估计值$\hat{a}_1$为A_1水平下试验数据的平均值减去所有试验数据的一般平均。

类似地，

$\hat{a}_i=A_i$水平下试验数据的平均值$-\bar{y}$，

$\hat{b}_j=B_j$水平下试验数据的平均值$-\bar{y}$，

$\hat{c}_k=C_k$水平下试验数据的平均值$-\bar{y}$，

$\hat{d}_L=D_L$水平下试验数据的平均值$-\bar{y}$。

$(\widehat{ab})_{ij}=A_iB_j$水平下试验数据的平均值$-\hat{a}_i-\hat{b}_j-\bar{y}$。

由此我们可以进一步理解“一般平均”与“效应”的含义：“一般平均”μ可用试验数据的平均值来估计。它表明了各因素均为“中等”水平时的值；因素A取A_1水平时的“效应”a_1可用A_1水平下试验数据的平均值与一般平均的差来估计。它表明了A取A_1水平时的平均指标是比一般平均$\bar{y}$好一些还是差一些。

按照上述估计值的公式我们可以求出例1.2中各估计

值：

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{455}{8} = 56.875$$

$$\hat{a}_1 = \frac{190}{4} - 56.875 = 47.5 - 56.875 = -9.375,$$

$$\hat{a}_2 = \frac{265}{4} - 56.875 = 66.25 - 56.875 = 9.375,$$

$$\hat{b}_1 = \frac{190}{4} - 56.875 = 47.5 - 56.875 = -9.375,$$

$$\hat{b}_2 = \frac{265}{4} - 56.875 = 66.25 - 56.875 = 9.375,$$

$$\hat{c}_1 = \frac{225}{4} - 56.875 = 56.25 - 56.875 = -0.625,$$

$$\hat{c}_2 = \frac{230}{4} - 56.875 = 57.5 - 56.875 = 0.625,$$

$$\hat{d}_1 = \frac{235}{4} - 56.875 = 58.75 - 56.875 = 1.875,$$

$$\hat{d}_2 = \frac{220}{4} - 56.875 = 55 - 56.875 = -1.875,$$

$$(\widehat{ab})_{11} = \frac{100}{2} - (-9.375) - (-9.375) - 56.875 = 11.875,$$

$$(\widehat{ab})_{12} = \frac{90}{2} - (-9.375) - 9.375 - 56.875 = -11.875,$$

$$(\widehat{ab})_{21} = \frac{90}{2} - 9.735 - (-9.375) - 56.875 = -11.875,$$

$$(\widehat{ab})_{22} = \frac{175}{2} - 9.375 - 9.375 - 56.875 = 11.875$$

利用这些结果我们可以估计在任一生产条件下，经过大量重复试验，表观质量应在什么数值附近波动。例如在极差分析中，选出最优方案是$A_2B_2D_1C_2$这个条件的试验不在我们所做的8次试验中。但我们可以写出在此生产条件下试验结果的理论估计值：

$$\hat{m}=\hat{\mu}+\hat{a}_2+\hat{b}_2+\hat{d}_1+\hat{c}_2+\widehat{(ab)}_{11}$$

$$=56.875+9.375+9.375+1.875+0.625+11.875=90$$

由于试验总有误差，所以实测值一般是在此估计值的附近摆动。又如第4号试验是在$A_1B_2C_2D_1$条件下进行的。这些试验结果评分为45，由于一次性试验总带有随机性，所以我们可以提出：在大量重复试验时，平均试验结果是多少？这里可计算

$$\hat{\mu}_4=\hat{\mu}+\hat{a}_1+\hat{b}_2+\hat{c}_2+\hat{d}_1+\widehat{(ab)}_{11}$$

$$=56.875-9.375+9.375+0.625+1.875+11.875=71.25$$

这表明第4号试验在大量重复试验时，其试验结果在71.25附近波动。

同二水平试验相似，我们可以得到三水平正交表效应的估计公式如下：

$$\hat{\mu}=\frac{T}{n},\qquad T=\sum_{i-1}^{n}y_i,$$

$$\hat{a}_i=\frac{A_i}{n/3}-\hat{\mu}$$

$$\hat{b}_j=\frac{B_j}{n/3}-\hat{\mu}$$

$$\widehat{(ab)}_{ij}=\frac{(AB)_{ij}}{n/9}-\hat{a}_i-\hat{b}_j-\hat{\mu},$$

其中n为总的试验次数，如在$L_9(3^4)$中，$n=9$，在$L_{27}(3^{13})$中，$n=27$…等，A_i为因素A的第i个水平所对应的数据之和，B_j为因素B的第j个水平所对应的数据之和，$(AB)_{ij}$为A_iB_j水平所对应的数据之和。

第四节　缺失数据补偿

在利用正交表进行试验设计过程中，当我们对试验结果进行统计分析时，要求数据齐全。然而，倘若由于某种原因，或使某些试号的试验数据丢失。当然应设法补齐。最好是重做试验以取得完备的数据。如果条件不允许时，我们可以采用缺失数据补偿的数学方法。本节主要介绍利用数据结构式和参数估计的方法来进行失落数据的补偿。

我们仍以例1．1来加以具体说明。它是有三个因素，三个水平的试验。不考虑交互作用，采用$L_9(3^4)$正交表，其表头设计及试验结果如表3—11和表3—12所示。

表3—11

表头设计	A	B	C	试验结果
试验号 \ 列号	1	2	3	y_i
1	1	1	1	16.9
2	1	2	2	19.1
3	1	3	3	16.7
4	2	1	2	19.8
5	2	2	3	23.7
6	2	3	1	19.0
7	3	1	3	25.3
8	3	2	1	20.4
9	3	3	2	23.1
I_j	52.7	62.0	56.3	$T=\sum_{i=1}^{9} y_i=184$
II_j	62.5	63.2	62.0	$T^2=33856$
III_j	68.8	58.8	65.7	$CT=\frac{T^2}{9}=3761.8$
$R_j^2=\mathrm{I}_j^2+\mathrm{II}_j^2+\mathrm{III}_j^2$	11416.98	11295.68	11330.18	
$\frac{R_j^2}{3}$	3805.66	3765.23	3776.73	$S_{总}=\sum_{i=1}^{9} y_i^2-CT$
$S_j=\frac{R_j^2}{3}-CT$	43.86	3.43	14.93	$=3833.9-3761.8$ $=72.1$ $f_{总}=9-1=8$

表3—12　**方 差 分 析 表**

方差来源	偏差平方和	自由度	平均偏差平方和	$F_{比}$	显著性
A	$S_A=S_1=43.86$	2	21.64	5.49	(*)
B	$S_B=S_2=3.43$	2	1.72	0.44	
C	$S_C=S_3=14.93$	2	7.47	1.90	
$S_{误}$	$S_{总}-\sum_{i=1}^{i} S_i=9.88$	2	4.94		

$F_{0.05}(2,2)=19$；$F_{0.25}(2,2)=3$

如果由于某种原因，假设第6号试验数据缺失，那么怎样来补偿和估计该数据呢？

我们可以利用第6号试验数据y_6的数据结构式：

$y_6=\mu+a_2+b_3+c_1+\varepsilon_6$　　（其中ε_6是随机变量）利用参数估计法，分别求出μ，a_2，b_3，c_1的估计值$\hat{\mu}$，$\hat{a}_2$，$\hat{b}_3$，$\hat{c}_1$：

$$\hat{\mu}=\bar{y}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}y_i=\frac{1}{9}(165+y_6)=18.33+\frac{y_6}{9},$$

$\hat{a}_2=A_2$水平下试验数据的平均值$-\bar{y}$，

$\hat{b}_3=B_3$水平下试验数据的平均值$-\bar{y}$

$$=\frac{1}{3}(39.8+y_6)-\bar{y}=13.27+\frac{y_6}{3}-\bar{y},$$

$\hat{c}_1=C_1$水平下试验数据平均值$-\bar{y}$

$$=\frac{1}{3}(37.3+y_i)-\bar{y}=12.43+\frac{y_6}{3}=\bar{y}。$$

由此可得y_6的估计值：

$$y_6=\hat{\mu}+\hat{a}_2+\hat{b}_3+\hat{c}_1$$

$$=\bar{y}+14.5+\frac{y_6}{3}-\bar{y}+13.27+\frac{y_6}{3}-\bar{y}+12.43+\frac{y_6}{3}-\bar{y}$$

$$=40.2-2\bar{y}+y_6$$

$$=3.55+\frac{7}{9}y_6。$$

合并后得 $\frac{2}{9}y_6 = 3.55$

所以 $y_6 = 15.95 \approx 16$

我们以估计出来的数据 y_6 值来补齐缺失数据，然后再进行偏差平方和的计算和方差分析。应该指出的是，由于 y_6 是根据其它数据被估计出来的。因此，$f_{总}$要减少 1，相应地自由度也要减少 1。如本例中 $f_{总} = 8 - 1 = 7$，具体计算及方差分析见表 3—13和表 3—14所示。

表 3—13

表头设计	A	B	C	试验结果
试验号 \ 列号	1	2	3	y_i
1	1	1	1	16.9
2	1	2	2	19.1
3	1	3	3	16.7
4	2	1	2	19.8
5	2	2	3	23.7
6	2	3	1	$\boxed{16}$
7	3	1	3	25.3
8	3	2	1	20.4
9	3	3	2	23.1
$Ⅰ_j$	52.7	62.0	53.3	$T = \sum_{i=1}^{9} y_i = 181$
$Ⅱ_j$	59.5	63.2	62.0	$T^2 = 32761$
$Ⅲ_j$	68.8	55.8	65.7	$CT = \frac{T^2}{9} = 3640.1$
$R_j^2 = Ⅰ_j^2 + Ⅱ_j^2 + Ⅲ_j^2$	11050.98	10951.88	11001.38	$S_{总} = \sum_{i=1}^{9} y_i^2 - CT$
$R_j^2/3$	3683.66	3650.63	3667.13	$= 3728.5 - 3640.1$
$S_j = \frac{R_j^2}{3} - CT$	43.56	10.53	27.03	$= 88.4$ $f_{总} = 8 - 1 = 7$

表3—14　　方差分析表

方差来源	偏差平方和	自由度	平均偏差平方和	$F_{比}$	显著性
A	$S_A=S_1=43.56$	2	21.78	3	(*)
B	$S_B=S_2=10.53$	2	5.27	0.72	
C	$S_C=S_3=27.03$	2	13.52	1.86	
$S_{误}$	$S_{总}-\sum_{i=1}^{i} S_i=7.28$	1	7.28		

$F_{0.05}(2,2)=19$;　$F_{0.25}(2,2)=3$

第四章　正交表的灵活应用

第一节　正交表的改造

某一个试验，由于条件的限制，往往不一定都按照常规的正交表的要求进行试验设计。还可能存在按照常规的正交表来安排试验，但不一定合理，如果对正交表做适当的改造，来设计试验其效果更好。本节主要介绍用并列、拟水平法、拟因子法和组合法改造正交表的方法。

一、正交表的并列

在二水平的正交表中，如何安排几个四水平因子或八水平因子，及在三水平的正交表中，如何安排几个九水平的因子等等，都可采用"并列"的方法来改造二水平或三水平的正交表。

例如对一个L_m（2^n）的正交表，要在此表中安排一个四水平的因子，我们可以任意取出两列，它们处在同一横行的水平数对，只有四种组合关系，即（1，1），（1，2），（2，1），（2，2），再将这四种组合关系，按下述规则合并成一个新的四水平列：

1	1 → 1
1	2 → 2
2	1 → 3
2	2 → 4

合并后将这两列的交互效应列去掉。这样Lm（2^n）的正交表，就变换为有m个横行，一个四水平乘2^{n-3}个二水平列的新表，一般记为Lm（$4^1\times 2^{n-3}$）正交表。

下面的L_8（2^7）正交表是安排一个四水平因子后，变换成L_8（$4^1\times 2^4$）表的情况。这是将L_8（2^7）表的第1和第2列合并去掉它们的交互（第3列）后得到的，见表4—1所示。

表4—1

试验序号 \ 列号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2
4	2	2	2	1	1
5	3	1	2	1	2
6	3	2	1	2	1
7	4	1	2	2	1
8	4	2	1	1	2

对于一个Lm（2^n）正交表，如果要在表中安排两个四水平因子，根据上面的方法，可以取出四列。这四列分为两组，每两列一组，只要求每组的交互作用列不在另一组即可。按照上面的规则。令每一组中两列处在同一横行的水平数对为：

1　1→1

1　2→2

2　1→3

2　2→4

然后把这两个列组各自对应的交互作用列都去掉 Lm（2^n）正交表就改造成Lm（$4^2\times 2^{n-6}$）正交表了。下面就是L_{16}（2^{15}）正交表改造成 L_{16}（$4^2\times 2^9$）表的情况，如表 4—2 所示。

表 4—2

列号 试验序号	1 (1,2,3)	2 (1,2,3)	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1
4	1	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2
6	2	2	1	2	2	2	1	1	2	1	1
7	2	3	2	1	1	1	2	2	1	1	1
8	2	4	2	1	1	2	1	1	2	2	2
9	3	1	2	1	2	2	1	2	2	1	2
10	3	2	2	1	2	1	2	1	1	2	1
11	3	3	1	2	1	2	1	2	2	2	1
12	3	4	1	2	1	1	2	1	1	1	2
13	4	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1
14	4	2	2	2	1	1	1	2	1	1	2
15	4	3	1	1	2	2	2	1	2	1	2
16	4	4	1	1	2	1	1	2	1	2	1

显然，对于Lm（2^n）正交表，要安排三个，四个，五个……四水平因子都是办得到的，只要表的列数n大于3乘四水平的因子数即可。不难知道，正交表L_{16}（$4^1\times$

2^{12})，L_{16}（$4^2\times 2^9$），L_{16}（$4^3\times 2^6$），L_{16}（$4^4\times 2^3$），L_{16}（4^5）等都可由L_{16}（2^{15}）经过并列而得到。

掌握了$L_m(2^n)$表并列的方法，就不难把一个$L_{27}(3^{13})$正交表，并列为一个L_{27}（$9^1\times 3^9$）正交表。其规则是将L_{27}（3^{13}）正交表中1，2两列同一横行的水平数对为：

$$
\begin{array}{ll}
1 & 1\rightarrow 1\\
1 & 2\rightarrow 2\\
1 & 3\rightarrow 3\\
2 & 1\rightarrow 4\\
2 & 2\rightarrow 5\\
2 & 3\rightarrow 6\\
3 & 1\rightarrow 7\\
3 & 2\rightarrow 8\\
3 & 3\rightarrow 9
\end{array}
$$

第1，2两列合并为一个九水平列，去掉第1，2两列的交互列（第3，4两列），一个L_{27}（9×3^9）正交表的改造就完成了。由此可见，并列法是由相同水平正交表构造水平数不同的正交表的一种方法。它为安排水平数不同的试验提供了一条重要途径。

例1，在一项轧钢生产试验中，考察了十个因子对钢材合格率的影响。这十个因子所取的水平是：

A：钢材规格　　A_1，40m/m方钢

　　　　　　　A_2，10#角钢

　　　　　　　A_3，10#槽钢

　　　　　　　A_4，20#槽钢

B：钢锭型式　　B_1，小断面钢锭

		B_2，大断面钢锭
C：炼钢炉型		C_1，氧气顶吹转炉钢
		C_2，平炉钢
D：钢中炭来源		D_1，冶炼中保炭，
		D_2，加炭粉增炭
E：脱氧方法		E_1，镇静钢
		E_2，沸腾钢
F：轧制班次		F_1，白班
		F_2，中班
G：钢锭加热温度		G_1，高温
		G_2，低温
H：开轧温度		H_1，高温
		H_2，中温
I：钢锭精整班别		I_1，一班
		I_2，二班
J：钢种		J_1，二号钢
		J_2，三号钢

对这个问题，只研究各个因子的主效应和 AB两因子之间的交互效应。

十个因子中，有一个因子是四个水平，余者都是二水平。如要通过全因子试验，必须进行 $4\times2^9=2048$次 这实际是不可行的。

根据因子数，水平数以及工作量的大小，可采用L_{16}（2^{15}）正交表经并列改造后为L_{16}（4×2^{12}）的正交表。

试验的方法，是将每个试验号用10根钢锭来轧制，计算出一个合格率。每个试验号做了三次重复，这样一个试验号

共轧制30根钢锭，全部试验轧制了480根钢锭。

试验安排的表头设计，如表4—3所示。

表4—3

A	B	$(A\times B)_1$	$(A\times B)_2$	$(A\times B)_3$	C	D	E	F	G	H	I	J
123	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

并列后的表头设计与水平数相同，同正交表的表头设计一样，也遵循不混杂的原则。

在L_{16}（4×2^{12}）表中试验，将试验结果填入正交表的右侧，进行计算得表4—4所示。

先计算CT及各因子的变动。注意试验重复了三次，故试验总数是$3\times 16=48$，因此，

$$CT=\frac{(-85)^2}{48}=150.5$$

$$S_A=\frac{101^2+(45)^2+(-110)^2+(-31)^2}{4\times 3}-\frac{(-85)^2}{3\times 16}=1956.7$$

对于二水平列变动公式为

$$S_{列}=\frac{\mathrm{I}^2_{列}+\mathrm{II}^2_{列}}{4}-\frac{T^2}{8}$$

注意$T=\mathrm{I}_{列}+\mathrm{II}_{列}$，则有

$$S_{列}=\frac{\mathrm{I}^2_{列}+\mathrm{II}^2_{列}}{4}-\frac{(\mathrm{I}_{列}+\mathrm{II}_{列})^2}{8}=\frac{(\mathrm{I}_{列}-\mathrm{II}_{列})^2}{8}$$

$$S_B=\frac{[0-(-85)]^2}{16\times 3}=150.5$$

$$S_{A\times B}=S_{(A\times B)1}+S_{(A\times B)2}+S_{(A\times B)3}$$

表4—4

试验序号 \ 列号	A	B	(A×B)₁	(A×B)₂	(A×B)₃	C	D	E	F	G	H	I	J	合格率=(xᵢ+70)%			合计
	123	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	一次	二次	三次	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	9	5	17
3	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	15	13	14	42
4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	12	16	13	41
5	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	5	8	15
6	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	−25	−4	−9	−38
7	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	−3	−1	−5	−9
8	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	−6	−5	−2	−13
9	3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0	0	−13	−13
10	3	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	−16	−16	−14	−46
11	3	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	13	16	−15	−44
12	3	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	6	1	−14	−7
13	4	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	3	0	5
14	4	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	−8	−10	−8	−26
15	4	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	−1	3	−9	−7
16	4	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	−3	−1	1	−3
Ⅰ	101	−85	−66	−73	−76	−10	−33	−94	−63	26	−79	−58	−93	T=−85			
Ⅱ	−45	0	−19	−12	−9	−75	−52	9	−22	−111	−6	−27	8				
Ⅲ	110																
Ⅳ	−31																

$$=\frac{[-19-(-66)]^2+[-12-(-73)]^2+[-9-(-76)]^2}{16\times 3}=2170$$

$$S_C=\frac{[-75-(-10)]^2}{16\times 3}=88.0$$

$$S_D=\frac{[-52-(-33)]^2}{16\times 3}=7.5$$

$$S_E=\frac{[9-(94)]^2}{16\times 3}=221.0$$

$$S_F=\frac{[-22-(63)]^2}{16\times 3}=35.0$$

$$S_G=\frac{[-111-26]^2}{16\times 3}=391.0$$

$$S_H=\frac{[-6-(-79)]^2}{16\times 3}=111.0$$

$$S_I=\frac{[-27-(-58)]^2}{16\times 3}=20.0$$

$$S_J=\frac{[8-(-93)]^2}{16\times 3}=212.5$$

$$\begin{aligned}S_{总}&=[0^2+1^2+0^2+3^2+9^2+5^2+\cdots\cdots\\&\quad+(-1)^2+3^2+(-9)^2+(-3)^2+(-1)^2+1^2]-CT\\&=[0+1+0+9+81+25+\cdots+1+9+81\\&\quad+9+1+1]-CT=4293-150.5=4142.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{误}&=S_{总}-\Sigma S_{因}\\&=4142.5-[1956.7+150.5+2170+88.0+7.5\\&\quad+221.0+35.0+391.0+111.0+20.0+212.5]\\&=4142.5-3410.2=732.2\end{aligned}$$

各因子的自由度：

$f_A = 4 - 1 = 3$

$f_B = f_C = f_D = \cdots = f_J = 2 - 1 = 1$

$f_{A \times B} = f_A \times f_B = (4 - 1)(2 - 1) = 3$

$f_{误} = (3 - 1) \times 16 = 32$

$f_{总} = 3 \times 16 - 1 = 47$

根据上述计算，可得出方差分析表，如表4—5所示。

表4—5

方差来源	S	f	V	F	显著性
A	1956.7	3	652.2	28.5	※※
B	150.5	1	150.5	6.57	※
A×B	217.0	3	72.3	3.16	※
C	88.0	1	88.0	3.84	
D	7.5	1	7.5	0.33	
E	221.0	1	221.0	9.65	※※
F	35.0	1	35.0	1.53	
G	391.0	1	391.0	17.07	※※
H	111.0	1	111.0	4.85	※
I	20.0	1	20.0	0.87	
J	212.5	1	212.5	9.28	※※
误差	732.3	32	22.9		
总和	4142.5	47			

检验结果证明：对钢材合格率的影响，A，E，G，J四因子主效应影响高度显著，B,H,A×B的交互作用影响显著。由于合格率越高越好，因此最优工程条件可取$A_1B_2E_2G_1H_2J_2$，工程平均值计算是：

$$\mu = 70 + A_1 + B_2 + (A \times B)_1 + E_2 + G_1 + H_2 + J_2$$

$$= 70 + \frac{101}{3 \times 4} + \frac{9 + 26 + 8 - 6 - 19 - 12 - 9}{3 \times 8} - 8\frac{-85}{8 \times 16}$$

$$= 92.46$$

合并不显著的离差平方和：

$\tilde{S}_{误}$ = 不显著因子变动之和 + $S_{误}$

$= 20 + 35 + 7.5 + 88 + 732.3 = 882.8$

$\tilde{f}_{误} = 1 + 1 + 1 + 1 + 32 = 36$

$F_{0.05}(1, \tilde{f}_{误}) = 4.11$

有效重复数为：

$$n_e = \frac{\text{数据总个数}}{1 + \text{显著因子自由度之和}} = \frac{16 \times 3}{1+3+1+3+4} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\text{变动半径}\,\delta_{0.05} = \sqrt{F_{0.05}(1, \tilde{f}_{误})\,\frac{\tilde{S}_{误}}{\tilde{f}_{误} \cdot n_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{4.11 \times 882.8}{36 \times 4}} = 5.02$$

如果选择A_1，B_2，E_2，G_1，H_2，J_2的工艺条件，则合格率理论值 = (70 + 22.46) ±5.02%，有百分之九十五的把握说，合格率将在97.48～87.44%之间波动。

二、拟水平法

按正交表作拟水平设计，是一种在水平数较多的表中安排水平数较少的因子的方法。就是把水平数较少的因子，“虚拟”成水平数较多的因子，安排在水平数多的正交表中。例如，要在一个三水平正交表中安排一个或几个二水平因子，我们可以直接将一个或几个二水平因子“看成”是三水平的就可以了。

通过拟水平法，在水平数多的正交表中，可以安排水平数较少的因子是不受限制的。当正交表作拟水平改造后，其交互效应反映的关系并不会改变。一般对表中被改造成水平数少的那个列称为拟水平列，常用“′”的符号表示。

例如，一个$L_9(3^4)$表，要研究因子A与B对某种指标

的效应是否显著，其中A因子为二水平，B因子为三水平。今作拟水平设计$L_9(3^4)$表被改造为表4—6形式。

表4—6

试验序号＼列号	1′	1	2	3	4	试验结果
1	1	1	1	1	1	x_1
2	1	1	2	2	2	x_2
3	1	1	3	3	3	x_3
4	2	2	1	2	3	x_4
5	2	2	2	3	1	x_5
6	2	2	3	1	2	x_6
7	2	3	1	3	2	x_7
8	2	3	2	1	3	x_8
9	2	3	3	2	1	x_9
Ⅰ Ⅱ Ⅲ	I_1' II_1'	I_1 II_1 III_1	I_2 II_2 III_2	I_3 II_3 III_3	I_4 II_4 III_4	$T=\Sigma$

此表是把A因子安排在第1′列，B因子安排在第2列，将所考查的指标填入表中。这个表中的1′列为拟水平列，1列为原来未改造时的情况，改造后效应计算如下：

$$\mathrm{I}_1' = x_1 + x_2 + x_3 = \mathrm{I}_1$$

$$\mathrm{II}_1' = x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = \mathrm{II}_1 + \mathrm{III}_1$$

$$S_1' = \frac{\mathrm{I}_1'^2}{3} + \frac{\mathrm{II}_1'^2}{6} - \frac{T^2}{9}$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{I}_1^2 + \frac{1}{6}(\mathrm{II}_1 + \mathrm{III}_1)^2 - \frac{T^2}{9}$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{I}_1^2 + \frac{1}{6}\mathrm{II}_1^2 + \frac{1}{3}\mathrm{II}_1\mathrm{III}_1 + \frac{1}{6}\mathrm{III}_1^2 - \frac{T^2}{9}$$

令 $S_1'' = \frac{1}{6}(\mathrm{II}_1 - \mathrm{III}_1)^2$

则 $S_1' + S_1'' = \frac{1}{3}\mathrm{I}_1^2 + \frac{1}{3}\mathrm{II}_1^2 + \frac{1}{3}\mathrm{III}_1^2 - \frac{T^2}{9}$

显然，$S_1 = \frac{1}{3}\mathrm{I}_1^2 + \frac{1}{3}\mathrm{II}_1^2 + \frac{1}{3}\mathrm{III}_1^2 - \frac{T^2}{9}$

故$S_1 = S_1' + S_1''$

这说明$L_9(3^4)$正交表第1列作拟水平改造后，原第1列的离差平方和可以分解为两部份：一部分为拟水平列（1′列）的离差平方和，另一部分则属于误差引起的离差平方和，这样S_1''则应并入误差项中。同样，原来1列的自由度也可分为两部分：一部分是拟水平列的自由度 $f_1' = (2-1) = 1$；另一部分是误差的自由度f_1''，$f_1 = f_1' + f_1''$。

例2 在氧气顶吹转炉供氧条件的试验中，考察装入量（A），喷头喉口直径B和氧耗量（C）这三个因子对平均降碳速度的影响。因子的水平安排为：

A：装入量（T），$A_1 = 13$，$A_2 = 11$，$A_3 = 9$。

B：喷头喉口直径（mm）

$B_1 = 18$，$B_2 = 25.8$，$B_3 = 30.0$。

C：氧耗量（$M^3/T\cdot$分），$C_1 = 2.1$，$C_2 = 2.8$。

用拟水平设计，作了三次重复试验，其结果如表4—7所示。

表4—7

试验序号 \ 列号	A 1	B 2	3	C 3′	4	数据 x_i=（0.18－平均降碳速度）×100			合　计
1	1	1	1	1	1	−7.5	9.2	−7.5	−24.2
2	1	2	2	1	2	−6.0	−5.4	−4.3	−15.7
3	1	3	3	2	3	−5.7	−3.9	−5.7	−15.3
4	2	1	2	1	3	−3.1	−2.3	−3.4	−8.8
5	2	2	3	2	1	2.4	0.8	3.8	7.0
6	2	3	1	1	2	−1.6	−0.8	−2.4	−4.8
7	3	1	3	2	2	1.5	6.0	5.0	12.5
8	3	2	1	1	3	2.4	3.4	4.8	10.2
9	3	3	2	1	1	2.9	3.5	2.5	8.9
Ⅰ	−55.2	−20.5	−18.4	−34.0	−8.3				
Ⅱ	−6.6	1.9	−15.6	4.2	−8.0				T=−29.8
Ⅲ	32	−11.2	4.2		−13.5				

进行方差分析

首先计算CT及因子A、B的变动同前一样，即得：

$$CT=\frac{T^2}{3\times 9}=\frac{888.04}{27}$$

$$S_A=S_1=\frac{\mathrm{I}_1^2+\mathrm{II}_1^2+\mathrm{III}_1^2}{3\times 3}-CT$$

$$=\frac{(-55.2)^2+(-6.6)^2+32^2}{9}-\frac{888.04}{27}=\frac{11455.76}{27}$$

$$S_B=S_2=\frac{\mathrm{I}_2^2+\mathrm{II}_2^2+\mathrm{III}_2^2}{3\times 3}-CT$$

$$= \frac{(-20.5)^2 + 1.9^2 + (11.2)^2}{9} - \frac{888.04}{27} = \frac{759.86}{27}$$

$$S_c = \frac{[(-18.4) + (-15.6)]^2}{3 \times 6} + \frac{(4.2)^2}{3 \times 3} - CT$$

$$= \frac{1786.92 - 888.04}{27} = \frac{898.88}{27}$$

$$S_4 = \frac{(-8.3)^2 + (-8.0)^2 + (-13.5)^2}{3 \times 3} - CT$$

$$= \frac{945.42 - 888.04}{27} = \frac{57.38}{27}$$

$$S_3'' = \frac{1}{18}[(-18.4) - (-15.6)]^2 = \frac{11.76}{27}$$

$$S_{误_1} = S_4 + S_3'' = \frac{57.38 + 11.76}{27} = \frac{69.14}{27}$$

$$S_{总} = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CT = 547.76 - \frac{888.04}{27} = \frac{13901.48}{27}$$

$$S_{误_2} = S_{总} - \sum S_i$$

$$= \frac{13901.48}{27} - \frac{11455.76}{27} - \frac{759.86}{27} - \frac{898.88}{27}$$

$$- \frac{57.38}{27} - \frac{11.76}{27} = \frac{717.84}{27}$$

对于重复试验的情况，如果有空白列，即两类偏差都存在，它们都是误差的估计值，所以把两类偏差合并起来作为误差的估计，记为$S_{误}$

$$S_{误} = S_{误_1} + f_{误_2}$$

其自由度$f_{误} = f_{误_1} + f_{误_2}$

然后用$S_{误}$去检验各因子及它们的交互作用是否显著。

对于重复取样的情况，$S_{误_2}$与$S_{误_1}$相差不太大，即用$S_{误_2}$去检验$S_{误_1}$，检验结果，认为$S_{误_2}$与$S_{误_1}$的差异不显著，这时将$S_{误_2}$，$S_{误_1}$合并当作试验误差。就是计算

$$F = S_{误_1}/f_{误_1} \Big/ S_{误_2}/f_{误_2}$$

在给定的信度α，有$F < F_\alpha(f_{误_1}, f_{误_2})$，说明$S_{误_1}$与$S_{误_2}$的差异不显著，可将$S_{误_2}$合并列试验误差。若$F > F_\alpha(f_{误_1}, f_{误_2})$，则$S_{误_2}$不能归入试验误差

$$S_误 = S_{误_1} + S_{误_2} = \frac{69.14 + 717.84}{27} = \frac{786.98}{27}$$

$$f_误 = f_{误_1} + f_{误_2} = 3 + 18 = 21$$

方差分析结果如表4—8所示。

表4—8

方差来源	S	f	v	F	显著性
A	11455.76/27	2	5727.88/27	152.8	* *
B	759.86/27	2	379.43/27	10.12	* *
C	898.88/27	1	898.88/27	23.98	* *
误差	786.98/27	21	37.48/27		
总和	13901.48/27	26			

$F_{0.01}(2,21) = 5.78$　$F_{0.01}(1,21) = 8.02$

工程平均的估计：

方差分析的结果表明：因子A、B、C都高度显著，因子A_3较好，因子B_2较好，因子C_2较好。

$$a_1 = \frac{-55.2}{9} - \frac{(-29.8)}{27} = \frac{-135.8}{27}$$

$$a_2=\frac{-6.6}{9}-\frac{(-29.8)}{27}=\frac{10}{27}$$

$$a_3=\frac{32}{9}-\frac{(-29.8)}{27}=\frac{125.8}{27}$$

$$b_1=\frac{-31.7}{27},\quad b_2=\frac{35.5}{27},\quad b_3=\frac{-38}{27}$$

$$c_1=\frac{-34.0}{18}-\frac{(-29.8)}{27}=\frac{-21.2}{27}$$

$$c_2=\frac{8.4}{9}-\frac{(-29.8)}{27}=\frac{55}{27}$$

$$\mu_{A_3B_2C_2}=0.18-\frac{1}{100}\left(\frac{-29.8}{27}+\frac{125.8}{27}+\frac{35.5}{27}+\frac{55}{27}\right)=0.18-0.069=0.111$$

采用了拟水平法以后，求工程平均变动半径的公式仍然成立，但其n_e的表达式要修改成：

$$n_e=\frac{\text{试验次数}}{1+\text{各}\left(\dfrac{\text{试验总次数}}{\text{显著因子出现水平的重复数}}-1\right)\text{之和}}$$

$$n_e=\frac{9\times3}{1+\left(\dfrac{9\times3}{3\times3}-1\right)+\left(\dfrac{9\times3}{3\times3}-1\right)+\left(\dfrac{9\times3}{3\times3}-1\right)}=\frac{27}{7}$$

$$F_{0.05}(1,21)=4.32$$

$$\tilde{S}_{误}=S_{误}=\frac{786.98}{27}$$

$$\tilde{f}_{误}=f_{误}=21$$

$$\delta_{0.05}=\sqrt{\frac{4.32\times 786.98/27}{21\times 27/7}}=\sqrt{\frac{4.32\times 786.98\times 7}{21\times 27\times 27}}$$
$$\doteq 1.25\%$$

可见平均降碳速度的理论值在0.111±0.0125之间。也就是说，我们有95%的把握说工程平均变化的范围是0.0985～0.1235之间。

三、拟因子法

拟因子法的基本方法是，将水平数较少的正交表的某些列加以改造，使得改造后的列能排下水平数较多的因子。最常见的是把二水平正交表改造成即能安排三水平的因子，又能安排二水平因子的表。

考虑下列三因子：

$$A\begin{cases}A_1\\A_2\end{cases}\qquad B\begin{cases}B_1\\B_2\\B_3\end{cases}\qquad C\begin{cases}C_1\\C_2\end{cases}$$

如果将上述三因子排入L_8（2^7）表中，则必须对正交表进行一定改造才行。

应该注意的是，A，C是二水平，在L_8（2^7）表中其主效应各占一列；B是三水平，它的自由度 $f_B=3-1=2$，应在L_8（2^7）表中占两列。

首先从L_8（2^7）表中取出二列，例如第2，3两列。其同一横行水平数对为（1，1），（1，2），（2，1），（2．2）四种。把它按下列规则改成一个三水平列。

$$1,\ 1\rightarrow 1$$
$$1,\ 2\rightarrow 2$$
$$2,\ 2\rightarrow 2$$
$$2,\ 1\rightarrow 3$$

当然，这种对应关系的规定是任意的，一般情况下将其认为重要的那个水平对应于两种数对。这样可将因子B安排在三水平列上。由于第2，3两列的交互作用为第1列，如果在这一列上安排一个二水平因子A，在第4列安排因子C，则表的设计将如表4—9所示。

表4—9

列号 试验号	A 1	B $\widehat{23}$	C 4	指　　标
1	1	1	1	x_1
2	1	1	2	x_2
3	1	2	1	x_3
4	1	2	2	x_4
5	2	2	1	x_5
6	2	2	2	x_6
7	2	3	1	x_7
8	2	3	2	x_8

对于这个设计，可用前四行A因子为A_1时的考查指标比较B_1与B_2；用后四行A因子为A_2时考查指标比较B_2与B_3。但是，这时B_1与B_3就不能直接比较，因为比较B_1与B_3的关系式（$\frac{x_7+x_8}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}$），既是$B_3$与$B_1$的平均差，又是$A_2$与$A_1$一部分指标的平均差，这两种平均差混杂在一起没办法区分。

从表中B因子与C因子的关系，可以知道它们是不会发生上述问题的。根本原因在于原L_8（2^7）表的第1列是第2，3两列的交互列，而第4列不是第2，3两列的交互

列。因此可以得出一条规律：在二水平正交表中，用某两列构成一个三水平列后，该两列的交互作用列不再适宜安排其他因子。

这样只得将因子A另作安排，原来的第1列闲着，叫它"赋闲"，这一列就称为赋闲。结果使L_8（2^7）表改造为下列表4—10的形式。

表4—10

表头安排	赋闲	B	C	A	$(B\times A)_1$	$(B\times A)_2$
列号	1	$\widehat{23}$	4	5	6	7

安排好各个因子后，查L_8（2^7）表的交互作用表，可以确定被改造为三水平的这个列与其它列的因子交互作用列表。由于三水平因子的交互作用应占两列，它就是原L_8（2^7）表的第2，3两列分别与其它排有因子的列的交互作用之和，如上表中B与A的交互作用列为第6与第7列。

用二水平正交表作拟因子设计，把任意两列改造成一个新列后，这两列的交互作用列必须"赋闲"。于是，在二水平正交表中，当安排二个以上的三水平因子作拟因子设计时，使改造后的几个新列共有一个赋闲列，就可以提高正交表的使用效率。

例如：L_{16}（2^{15}）表的第2，第3两列的交互列为第1列，而第4，第5列的交互列也是第1列，如果有两个三水平因子时，对L_{16}（2^{15}）表做拟因子设计，把第2，第3列与第4，第5列分别改造两个三水平列，这样只赋闲一个列，即第1列。假如把第2列和第3列改造为一个三水平列，

再把第4列和第8列改造为另一个三水平列，则必须将第1列和第2列同时“赋闲”，这种表头设计损失的效应列就多了。

拟因子设计后，各项效应计算略有不同，必须注意如下两点：

1．未改造列的效应计算与正交表原来各列的效应计算一样。

2．改造为多水平后的列的效应计算应有所校正。未排因子的列（赋闲列除外）是误差列。

例如$L_{16}(2^{15})$第2列，第3列改造成的三水平列记为第1′列；由第4列，第5列改造成的三水平列记为第2′列。I_1'，II_1'，III_1'分别表示对应于第1′列的水平“1”，“2”，“3”的数据之和，I_2'，II_2'，III_2'分别表示应对于第2′列的水平“1”，“2”，“3”的数据之和。W_A，W_B分别称为因子A和B效应的修正值，其计算公式是：

$$W_A=\frac{1}{2}\left(\frac{y_5+y_6+y_7+y_8}{4}-\frac{y_9+y_{10}+y_{11}+y_{12}}{4}\right)$$

$$W_B=\frac{1}{2}\left(\frac{y_3+y_4+y_7+y_8}{4}-\frac{y_9+y_{10}+{}_{13}+y_{14}}{4}\right)$$

$$\therefore \hat{a}_1=\frac{\mathrm{I}_1'}{4}-\frac{T}{16}-W_A$$

$$\hat{a}_2=\frac{\mathrm{II}_1'}{8}-\frac{T}{16}$$

$$\hat{a}_3=\frac{\mathrm{III}_1'}{4}-\frac{T}{16}+W_A$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\mathrm{I}'^2}{4} - \frac{T}{16} - W_B$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\mathrm{II}'^2}{8} - \frac{T}{16}$$

$$\hat{b}_3 = \frac{\mathrm{III}'^2}{4} - \frac{T}{16} + W_B$$

用拟因子法在二水平正交表上安排的试验，三水平因子效应的一般计算公式可用文字表达如下：

$$\hat{a}_1 = \frac{A_1\text{水平对应数据之和}}{A_1\text{水平试验次数}} - \text{总平均} - \text{校正项}$$

$$\hat{a}_2 = \frac{A_2\text{水平对应数据之和}}{A_2\text{水平试验次数}} - \text{总平均}$$

$$\hat{a}_3 = \frac{A_3\text{水平对应数据之和}}{A_3\text{水平试验次数}} - \text{总平均} + \text{校正项}$$

校正项$W_A = \frac{1}{2}$（A_2对应于赋闲列“1”数据的平均值—A_2对应于赋闲列“2”数据的平均值）

这个式子中的a和A等是代表三水平因子的效应和水平的符号，如果B也是一个用拟因子法在二水平正交表上安排的因子，那么，用b代替a，用B代替A，就可行了。

例3，研究钒钛合金重轨钢成分对屈服强度的影响。因子和水平的关系如表4—11所示。

表 4—11

因子＼水平	1	2	3
钒V	0.04～0.08	0.09～0.13	0.14～0.18
钛Ti	＜0.03	0.04～0.08	0.10～0.14
碳C	0.50～0.58	0.61～0.69	0.72～0.78
硅Si	0.48～0.58	0.70～0.80	0.90～1.00
锰Mn	0.65～0.75	0.95～1.05	

这是一个有四个三水平因子和一个二水平因子的试验。只考察各因子的主效应，钒与碳，钛与碳的交互效应，最少试验次数应大于 $1+4\times(3-1)+(2-1)+2\times(3-1)=14$，采用 $L_{16}(2^{15})$ 作因子设计，让四个三水平因子共有一个赋闲列，表头设计如下：

因子	赋闲	Ti		V			Mn	C		C×Ti		C×V		Si	
列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

指标是屈服强度越大越好。

试验得到的屈服强度简化值及计算如表 4—12所示。

$$S_{Ti}=S_2+S_3=\frac{(\text{I}_2-\text{II}_2)^2}{2\times16}+\frac{(\text{I}_3-\text{II}_3)^2}{2\times16}$$

$$=\frac{3.5^2}{2\times16}+\frac{18.5^2}{2\times16}=\frac{3.5^2+18.5^2}{2\times16}=11.1$$

$f_{Ti}=2$

$S_V=S_4+S_5=320.1 \quad f_V=2$

$S_{Mn}=S_7=202.5 \quad f_{Mn}=1$

$S_c=S_8+S_9=246.4 \quad f_c=2$

$S_{Tixc}=S_{10}+S_{11}=25.4+0.1=25.5 \quad f_{Tixc}=2$

$S_{vxc}=S_{12}+S_{13}=24.9 \quad f_{vxc}=2$

$S_{si}=S_{14}+S_{16}=97.7 \quad f_{si}=2$

$S_{误1}=S_{6}=59.1 \qquad f_{误1}=1$

由于 $S_{误1}/f_{误1}=59.1$，比S_{Ti}/f_{Ti}，S_{Tixc}/f_{Tixc}

S_{vxc}/f_{vxc}，S_{si}/f_{si}都大，故可肯定这几种效应是不显著的。它们的离差平方和可以并入误差中。

$S'_{误1}=S_{误1}+S_{Ti}+S_{Tixc}+S_{vxc}+S_{si}=218.3$

$f'_{误1}=1+2+2+2+2=9$

$V'_{误1}=S'_{误1}/f'_{误1}=218.3/9=24.25$

$$S_{误2}=\sum_{i=1}^{16}\sum_{j=1}^{2}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2=45.36$$

$f_{误2}=16\times(2-1)=16$

$V_{误2}=S_{误2}/f_{误2}=2.84$

$$F=\frac{V_{误1}}{V_{误2}}=\frac{24.25}{2.84}=8.53$$

$F_{0.05}(9,16)=2.54$

$F>F_{0.05}$

说明两种误差不能合并，则方差分析结果见表4—12和表4—13所示

表 4—12

试验号 \ 水平 \ 列号	赋闲	Ti		V			Mn	C	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1
Ⅰ	68.0	131.5	139.0	80.0	120.5	108.0	89.5	90.5	109.0
Ⅱ	191.5	128.0	120.5	179.5	139.0	151.5	170.0	169.0	150.5
Ⅰ—Ⅱ	-123.5	3.5	18.5	-99.5	-18.5	-43.5	-80.5	-78.5	-41.5
$S=\frac{(Ⅰ-Ⅱ)^2}{2\times16}$	476.6	0.4	10.7	309.4	10.7	59.1	202.5	192.6	53.8

续表

10	11	12	13	Si 14	15	数据 (6s-60)		合 计
1	1	1	1	1	1	-8.5	-8.5	$y_1=-17.0$
2	2	2	2	2	2	3.5	3.0	$y_2=6.5$
1	1	2	2	2	2	6.5	11.5	$y_3=18.0$
2	2	1	1	1	1	18.5	13.5	$y_4=32.0$
2	2	1	1	2	2	-0.5	0.5	$y_5=0$
1	1	2	2	1	1	7.0	8.0	$y_6=15.0$
2	2	2	2	1	1	-0.5	3.5	$y_7=3.0$
1	1	1	1	2	2	5.0	5.5	$y_8=10.5$
1	2	1	2	1	2	6.5	3.5	$y_9=10.0$
2	1	2	1	2	1	14.5	16.0	$y_{10}=30.5$
1	2	2	1	2	1	15.5	12.5	$y_{11}=28.0$
2	1	1	2	1	2	11.5	12.0	$y_{12}=23.5$
2	1	1	2	2	1	10.0	10.5	$y_{13}=20.5$
1	2	2	1	1	2	7.0	7.5	$y_{14}=14.5$
2	1	2	1	1	2	14.5	13.5	$y_{15}=28.0$
1	2	1	2	2	1	18.0	18.5	$y_{16}=36.5$
115.5	129.0	116.0	126.5	109.0	148.5			T=259.5
144.0	130.5	143.5	133.0	150.5	111.0			
-28.5	-1.5	-27.5	-6.5	-41.5	37.5			
25.4	0.1	23.6	1.3	53.8	43.9			

表4—13

方差来源	S	f	V	F	$F_{0.05}$	显著性
V	320.1	2	160.0	6.6	4.26	*
Mn	202.5	1	202.5	8.35	5.12	*
C	246.4	2	123.2	5.08	4.26	*
误差	218.3	9	24.25			

最优条件的选取：

计算显著因子各水平的效应为：

总平均 $\bar{y}=\frac{259.5}{32}\doteq 8.11$

钒V：

$$\text{校正项}W_v=\frac{1}{2}\left(\frac{y_3+y_4+y_7+y_8}{2\times 4}-\frac{y_9+y_{10}+y_{13}+y_{14}}{2\times 4}\right)=-\frac{24}{32}$$

$$V_1=\frac{y_1+y_2+y_5+y_6}{2\times 4}-\bar{y}-W_v=-\frac{217.5}{32}$$

$$V_2=\frac{1}{2}\left(\frac{y_3+y_4+y_7+y_8}{2\times 4}+\frac{y_9+y_{10}+y_{13}+y_{14}}{2\times 4}\right)-\bar{y}=\frac{18.5}{32}$$

$$V_3=\frac{y_{11}+y_{12}+y_{15}+y_{16}}{2\times 4}-\bar{y}+W_v=\frac{180.5}{32}$$

碳C：

$$\text{校正项}W_c=\frac{1}{2}\left(\frac{y_2+y_4+y_6+y_8}{2\times 4}\right.$$

$$-\frac{y_9+y_{11}+y_{13}+y_{15}}{2\times 4}=-\frac{45}{32}$$

$$C_1=\frac{y_1+y_3+y_5+y_7}{2\times 4}-\bar{y}-W_c=-\frac{198.5}{32}$$

$$C_2=\left(\frac{y_2+y_4+y_6+y_8}{2\times 4}+\frac{y_9+y_{11}+y_{13}+y_{15}}{2\times 4}\right)$$

$$-\bar{y}=\frac{41.5}{32}$$

$$C_3=\frac{y_{10}+y_{12}+y_{14}+y_{16}}{2\times 4}-\bar{y}-W_c=\frac{115.5}{32}$$

锰Mn：

$$Mn_1=\frac{x_1+x_2+x_7+x_8+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}}{2\times 8}$$

$$-\bar{y}=\frac{179}{32}-\frac{259.5}{32}=-\frac{80.5}{32}$$

$$Mn_2=\frac{x_3+x_4+x_5+x_6+x_9+x_{10}+x_{15}+x_{16}}{2\times 8}$$

$$-\bar{y}=\frac{80.5}{32}$$

由上述计算结果知道，最优条件应取为 $V_3Mn_2C_3$，Si与Ti可任取，考虑其他条件取定Si_3，Ti_1。

$$\mu_{优}=60+\frac{259.5}{32}+\frac{180.5}{32}+\frac{115.5}{32}+\frac{80.5}{32}=79.9$$

四、组合法

组合法，也是一种在水平数多的正交表中安排水平数较少因子的办法。现在考虑一个四因子的试验。A，B因子是

二水平，C，D因子是三水平，交互作用均可忽略。选用什么表，如何作表头设计呢？通过计算因子的总自由度，知道：

$$\sum f_{因} = 2 \times (2-1) + 2 \times (3-1) = 6$$

所以，这个试验最好选用$L_8(2^7)$或$L_9(3^4)$来安排。如果我们稍加分析，就会知道，用$L_8(2^7)$表经过拟因子法对正交表进行改造是可以安排的。现在要求采用组合法，试将其安排在$L_9(3^4)$表中，这样做，虽然试验增加了一次，但效应的计算则比拟因子设计要简易一些。

将$L_9(3^4)$表的第1列改造为两个水平列，令：

1→(1，1) 2→(1，2) 3→(2，1) 得到表4—14所示。

表4—14

试验序号 \ 列号	1′	1″	2	3	4
1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2
3	1	1	3	3	3
4	1	2	1	2	3
5	1	2	2	3	1
6	1	2	3	1	2
7	2	1	1	3	2
8	2	1	2	1	3
9	2	1	3	2	1

表头设计如表4—15。

表 4—15

因　　子	A	B	C	D	
列　　号	1′	1″	2	3	4

这样，原来的第 1 列看成“组合因子”（ab）的效应列。按前面的规定：

（AB）为 1 水平时 $=A_1$，B_1

（AB）为 2 水平时 $=A_1$，B_2

（AB）为 3 水平时 $=A_2$，B_1

则：$(ab)_1=\frac{\mathrm{I}_1}{3}-\frac{T}{9}$　$(ab)_2=\frac{\mathrm{II}_1}{3}-\frac{T}{9}$

$(ab)_3=\frac{\mathrm{III}_1}{3}-\frac{T}{9}$

由于不考虑交互效应，即认为A与B之间不存在交互效应，可认为“组合因子”（AB）的效应为A效应与B效应的“组合”为：

$A_1+B_1=(AB)_1$　　$A_1+B_2=(AB)_2$

$A_2+B_1=(AB)_3$

$$a_1=\frac{1}{3}\left[(AB)_1-(AB)_3\right]=\frac{\mathrm{I}_1-\mathrm{III}_1}{9}$$

$$a_2=-\frac{2}{3}\left[(AB)_1-(AB)_3\right]=\frac{2}{9}(\mathrm{I}_1-\mathrm{III}_1)$$

$$b_1=\frac{1}{3}\left[(AB)_1-(AB)_2\right]=\frac{1}{9}(\mathrm{I}_1-\mathrm{II}_1)$$

$$b_2=-\frac{2}{3}\left[(AB)_1-(AB)_2\right]=-\frac{2}{9}(\mathrm{I}_1-\mathrm{II})$$

显著性检验，非组合因子变动的计算与过去相同。因子A与B变动的计算公式分别是：

$$S_A=\frac{B取第1水平时A各水平对应指标的平方之和}{组合因子（AB）水平的重复次数}-\frac{B_1对应指标和的平方}{B_1的重复次数}$$

$$S_B=\frac{A取第1水平时B各水平对应指标的平方之和}{组合因子（AB）水平的重复次数}-\frac{A_1对应指标和的平方}{A_1的重复次数}$$

则具体写出得：

$$S_A=\frac{1}{3}（\mathrm{I}_1^2-\mathrm{III}_1^2）-\frac{1}{6}（\mathrm{I}_1+\mathrm{III}_1）^2$$

$$=\frac{1}{6}（\mathrm{I}_1-\mathrm{III}_1）^2$$

$$S_B=\frac{1}{3}（\mathrm{I}_1^2+\mathrm{II}_1^2）-\frac{1}{6}（\mathrm{I}_1+\mathrm{II}_1）^2$$

$$=\frac{1}{6}（\mathrm{I}_1-\mathrm{II}_1）^2$$

由此，可进行显著性检验，根据显著性检验的结果，又可定出最优生产条件。

工程平均的计算与一般情况相同。

例4 某厂在小型焦炉上进行一项试验，研究三种煤不同配比，在有关工艺因素F所得到的焦炭灰分含量。

试验确定的因子和水平为：

A、甲种煤比例　30%　50%　70%

B、集气总管压力（水柱）100m/m　120m/m

C、乙种煤比例　30%　20%　10%

D、结焦时间　　14小时　　12小时

E、火道温度　　1400℃　　1300℃

注意的是：甲乙两种煤比例确定后，两种煤的比例就完全确定，故它不再是一个独立的因子。

因子之间的交互作用可忽略。

表头设计对B因子采用拟水平法，对D，E因子采取组合法。选用$L_9(3^4)$正交表安排如下：

因子A　B　C　$\overline{DE}$

列号1　2　3　4

拟水平规则为：

1 → 1

2 → 2

3 → 1

组合因子规则为：

D	E	$\overline{DE}$
1	1	1
1	2	2
2	1	3

统计分析，把结果汇总如表4—16所示。

表 4—16

试验序号 \ 列号	A	B	C	DE			焦炭灰分	数据简化
	1	2	3	4原	4′D	4″E	(%)	X−10
1	1	1(1)	1	1	1	1	11.00	1.0
2	1	2(2)	2	2	1	2	10.2	0.2
3	1	3(1)	3	3	2	1	9.55	−0.45
4	2	1(1)	2	3	2	1	10.9	0.9
5	2	2(2)	3	1	1	1	10.2	0.2
6	2	3(1)	1	2	1	2	8.8	−1.2
7	3	1(1)	3	2	1	2	8.45	−1.55
8	3	2(2)	1	3	2	1	9.31	−0.69
9	3	3(1)	2	1	1	1	10.2	0.2
Ⅰ	0.75	0.35	−0.89	1.4				
Ⅱ	−0.1	0.29	1.3	−2.55				T=−1.39
Ⅲ	−2.04	1.45	−0.18	−0.24				

首先由表 4—16计算各列变动为:

$$S_1=\frac{0.75^2+(-0.1)^2+(-2.04)^2}{3}-\frac{(-1.39)^2}{9}=1.3634$$

$$S_2=\frac{0.35^2+(-0.29)^2+(-1.45)^2}{3}-\frac{(-1.39)^2}{9}=0.5550$$

$$S_3=\frac{(-0.89)^2+1.3^2+(-0.18)^2}{3}-\frac{(-1.39)^2}{9}=1.6927$$

$$S_4=\frac{1.4^2+(-2.55)^2+(-0.24)^2}{3}-\frac{(-1.39)^2}{9}=2.6254$$

再根据表头设计计算各因子及误差变动为:

$S_A = S_1 = 1.3634$, $f_A = 3 - 1 = 2$

$$S_B = \frac{[0.35 + (-1.45)]^2}{6} + \frac{(-0.29)^2}{3} - \frac{(-1.39)^2}{9} = 0.0150$$

$f_B = 2 - 1 = 1$

$S_c = S_3 = 1.6927 \qquad f_c = 3 - 1 = 2$

$S_{\overline{DE}} = S_4 = 2.6254 \qquad f_{\overline{DE}} = 3 - 1 = 2$

$S_D = \frac{1}{6}[1.4 - (-0.24)]^2 = 0.4483 \quad f_D = 1$

$S_E = \frac{1}{6}[1.4 - (-2.55)]^2 = 2.6004 \quad f_E = 2 - 1 = 1$

$S_{误} = S_2 - S_B = 0.54 \qquad f_{误} = 2 - 1 = 1$

因为 $\frac{S_B}{f_B} < \frac{S_{误}}{f_{误}}$，$\frac{S_D}{f_D} < \frac{S_{误}}{f_{误}}$

故应将B及D的变动并入误差，于是，

$S_{误}^{\triangle} = S_{误} + S_B + S_D = 1.0033$

$f_{误}^{\triangle} = f_{误} + f_B + f_D = 3$

由于我们认为S_D实际上是由误差引起的，因此可以认为原来表头设计中未排因子D，这时组合因子$\overline{DE}$实际上就是因子E，它是按对应规则：

$1 \to 1$

$2 \to 2$

$1 \to 3$

用拟水平法排在第4列上的。因此E的变动与效应都应当用拟水平法的相应公式进行计算。

$$S_E=\frac{(\mathrm{I}_4-\mathrm{III}_4)^2}{6}+\frac{\mathrm{II}_4^2}{3}-\frac{T^2}{9}$$

$$=\frac{(1.4-0.24)^2}{6}+\frac{(-2.55)^2}{3}-\frac{(-1.39)^2}{9}$$

$$=S_4-S_D$$

$$=2.6254-0.4483=2.1771$$

$$f_E=2-1=1$$

$$e_1=\frac{\mathrm{I}_4+\mathrm{III}_4}{6}-\frac{T}{9}=\frac{1.4-0.24}{6}-\frac{(-1.39)}{9}=0.348$$

$$e_2=\frac{\mathrm{II}_4}{3}-\frac{T}{9}=\frac{-2.55}{3}-\frac{(-1.39)}{9}=-0.696$$

用$S^{\triangle}_{误}$去进行显著性检验，得方差分析表4—17所示。

表4—17

方差来源	S	f	V	F	显 著 性
A	1.3634	2	0.6817	2.04	△
C	1.6927	2	0.8464	2.58	△
E	2.1771	1	2.1771	6.5	△
误差	1.0033	3	0.3344		

$F_{0.10}(1,\ 3)=5.54$　$F_{0.25}(1,\ 3)=2.02$

$F_{0.25}(2,\ 3)=2.28$

表中△表示75%把握显著。

计算显著因子A、C的效应：

$$a_1=\frac{0.75}{3}-\left(\frac{-1.39}{9}\right)=0.404$$

$$a_2=\frac{-0.1}{3}-\frac{(-1.39)}{9}=0.121$$

$$a_3=\frac{(-2.04)}{3}-\frac{(-1.39)}{9}=-0.526$$

$$c_1=\frac{(-0.89)}{3}-\frac{(-1.39)}{9}=-0.142$$

$$c_2=\frac{1.3}{3}-\frac{(-1.39)}{9}=0.588$$

$$c_3=\frac{-1.8}{3}-\frac{(-1.39)}{9}=-0.446$$

根据焦炭灰份这个指标，是焦炭灰分越低越好，所以最优工程条件为$A_3B_0C_3D_0E_2$。而B_0，D_0是表示为水平可任取。在好的工程条件下，其工程平均的估计值为：

$$\mu_{优}=10.0+\frac{(-1.39)}{9}+(-0.526)+(-0.446)$$
$$+(-0.696)=8.18\%。$$

第二节　正交表的灵活应用

上面介绍了正交表的改造，经过改造后的正交表，均衡搭配的性质也部分地被破坏了。因此，在进行方差分析的时候，对计算的效应和变动也就要进行修正，所以计算也就复杂得多。此外，考虑交互作用也就受到一定的限制，这是在具体灵活运用正交表时应注意的问题。

一、直和法

在复杂大型的试验中，会遇到因子较多，水平数不等。

对这种情况，如果把全部因子安排在一张正交表上，必然试验次数很多，试验周期又长，不可能在试验过程及时发现和处理问题。而采用直和法就是针对这种情况提出的行之有效的办法。

直和法的基本思想是把一个完整的试验分阶段进行试验。先把一部分因子和水平安排在第一张较小的正交表上进行试验，如果试验结果达不到要求，再充分利用第一阶段试验结果提供的信息，在第二张正交表上安排下一阶段的试验。最后再对二张正交表上试验的结果进行综合的分析，得出正确的结论。

直和法设计有下列三个基本方法。

（一）减因子

因为因子太多，一张正交表安排不下，所以在第一张正交表中把某些因子固定在一个水平上，到第二批试验时再比较它们各个水平，这就是减因子。

（二）减水平

对于有些水平数较多的因子，在第一张正交表上就比较全部水平有困难，可以分批比较它们的各个水平。先在第一张正交表中安排它们的一部分水平，经过分析，再把这部分水平中的最好水平挑出来，和剩下的水平一起排在第二张正交表中加以比较，这样做就称为减水平。

（三）复合因子

在一个大型的试验中，对于所考虑的因子，根据以往的经验和理论，可以掌握一定的规律，例如已知C_2不劣于C_1，D_2不劣于D_1，所需考察的仅仅是C_2是否显著比C_1好，D_2是否显著比D_1好。这时在第一张正交表上，可以只考虑C和D的复合因子（CD），它的两个水平分别是C_1D_1和C_2D_2，这

样，本来是两个因子C和D，现在第一批试验就只需考虑其复合因子。第一张正交表统计分析的结果，如果（CD）不显著，则可以断言C，D均不显著，第二批试验就不必考虑这两个因子了；如果（CD）显著，再在第二批试验时安排C，D的另一个复合因子（CD），它的第一水平是C_1D_2；第二水平是C_2D_1。最后对两批试验进行总的分析时，仍可判断C，D各自的显著性以及计算它们的效应。

现举一例说明直和法的应用

例5 泡沫聚乙烯电线的制造，试验安排的因子与水平情况如下：

A：螺杆的转数　$A_1=20$　$A_2=26$　$A_3=32$

B：螺杆的类型　$B_1=$甲　$B_2=$乙

C：发泡剂用量　$C_1=$较少　$C_2=$较多

D：螺杆的直径　$D_1=$现在的，$D_2=$稍细些

E：机身的温度　$E_1=140℃$　$E_2=155℃$　$E_3=170℃$

F：长径比　$F_1=2$　$F_2=3$

G：螺杆与套筒的间隔　$G_1=$现在的　$G_2=$较大

H：电线的牵引速度　$H_1=20$　$H_2=25$　$H_3=30$

指标是电线的某种性能，数值越大越好。

试验要求对A，B两因子的交互效应加以考察，其他交互效应可以忽略。

这个试验是一个八因子试验，其中有三个三水平因子，五个二水平因子。试验次数应大于：

$$1+\Sigma f_i=1+3\times(3-1)+5\times(2-1)+(3-1)(2-1)=14$$

可以考虑用拟因子法在$L_{16}(2^{15})$表上来安排试验。现采用直和法，可分批安排在$L_8(2^7)$表中。

第一批试验设计

根据已经掌握的资料和经验，有把握的认为C_2不劣于C_1，D_2不劣于D_1故可当作复合因子处理。用减因子，减水平，复合因子法处理后，第一次考虑的试验方案如表4—18所示。

表4—18

	水　　平		
A	A_1	A_2	（缺A_3）
B	B_1	B_2	
(CD)	C_1D_1	C_2D_2	
E	E_1	E_2	（缺E_3）
F	F_1	F_2	
G	固定在G_1水平上		
H	H_1	H_2	（缺H_3）

这就成为一个6因子二水平试验，可以安排在$L_8(2^7)$表中，为试验可靠，每个试验条件作四次重复试验。将表头设计，试验结果，计算情况一并填在表4—19。

表4—19

列号 / 水平 / 试验序号	A	B	A×B	(CD)	E	F	H	数据（减35）				合计
	1	2	3	4	5	6	7	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	y_{i4}	A_i
1	1	1	1	1	1	1	1	−22	−20	−20	−20	−82
2	1	1	1	2	2	2	2	−8	6	0	−2	−4
3	1	2	2	1	1	2	2	−3	3	−5	−1	−6
4	1	2	2	2	2	1	1	12	2	3	1	18
5	2	1	2	1	2	1	2	−9	−5	−17	−5	−36
6	2	1	2	2	1	2	1	0	9	7	4	20
7	2	2	1	1	2	2	1	5	13	8	8	34
8	2	2	1	2	1	1	2	4	7	12	5	28
Ⅰ	−74	102	−24	−90	−40	−72	−10					
Ⅱ	46	74	−4	62	12	44	−18					
Ⅰ−Ⅱ	−120	−176	−20	152	52	116	8	$R_1=-28$				
S	450	968	12.5	722	84.5	420.5	2					

根据这张表，可进行显著性检验。

现将其结果列成方差分析表，如表 4 —20所示。

表 4 —20

方差来源	S	f	V	F值	显著性
$\underline{A}$	450	1	450	26.44	* *
B	968	1	968	56.87	* *
$\underline{A}\times B$	12.5	1	12.5		
(CD)	722	1	722	42.42	* *
$\underline{E}$	84.5	1	84.5	4.96	*
F	420.5	1	420.5	24.70	* *
$\underline{H}$	2	1	2		
误$_2$	428	24	17.83		
误	442.5	26	17.02		
	$F_{0.01}(1,26)$ $=7.72$		$F_{0.05}(1,26)$ $=4.23$		

表上误$_2$表示由于重复试验产生的误差，因为$\underline{H}$和$\underline{A}\times B$的平均平方和均小于误$_2$的平均平方和，所以应并入误差。所以，误=误$_2$ + $S_{\underline{H}}$ + $S_{\underline{A}\times B}$)合并后的误差，并用它来作显著性检验。

第二批试验设计

根据第一批试验的结果可以进行第二批试验的设计。首先，在第一批试验设计的三水平因子A，E，H中，A和E都是第二水平比第一水平好，故第二批试验去掉A_1，安排A_2与A_3比较，E因子的效应虽然不显著，但E_2比E_1好，所以第二

批试验去掉E_1，安排E_2与E_3比较，H因子的第一水平可能比第二水平好，也就是说牵引速度可能少一些更好，因此在第二批试验中，我们改变一下计划，取消第三水平H_3，而考虑一个更小的牵引速度H_0（15）作为和H_1比较的新水平。这样得到另一个需要考察的因子H（H_0，H_1）。其次，复合因子（CD）显著，故需继续考察（CD）；F显著，第二批试验把它固定在F_2上。最后，还要考察第一批试验未考察过的因子G。总之，第二批试验的因子和水平由表4—21给出。

表4—21

因　　子	水		平
A	A_2	A_3	（缺A_1）
B	B_1	B_2	
(CD)	(C_1D_2)	(C_2D_1)	
E	E_2	E_3	（缺E_1）
F	固定在F_2		
G	G_1	G_2	
H	H_0（新加水平）	H_1	（缺H_2，H_3）

第二批试验仍然可以考察A×B的效应。

这些因子仍然可以排在第一张$L_8(2^7)$上进行试验。试验仍然重复了四次。表头设计，试验结果和计算情况可见表4—22所示。

表4—22

因子 水平 试验号	A (=)	B	A×B (=)	(CD)	E (=)	G	H (=)	数据（减35）				合计
	1	2	3	4	5	6	7	y'_{i1}	y'_{i2}	y'_{i3}	y'_{i4}	y'_i
1	1	1	1	1	1	1	1	−2	4	−4	−2	−4
2	1	1	1	2	2	2	2	11	8	15	10	44
3	1	2	2	1	1	2	2	4	7	12	5	28
4	1	2	2	2	2	1	1	23	20	26	21	90
5	2	1	2	1	2	1	2	6	9	12	8	35
6	2	1	2	2	1	2	1	11	8	14	9	42
7	2	2	1	1	2	2	1	14	11	17	12	54
8	2	2	1	2	1	1	2	15	11	20	14	60
Ⅰ	158	117	154	113	126	181	132	$R_2=349$				
Ⅱ	191	232	195	236	223	168	167					
Ⅰ－Ⅱ	−33	−115	−41	−123	−97	13	15					
S	34.03		52.53		294.03	5.28	7.03					

两批试验进行完毕之后，可对全部试验结果进行总的分析。

令：R_1 = 第一批试验全部数据之和Σy_{ij}；

R_2 = 第二批试验全部数据之和$\Sigma y'_{ij}$；

A_iR_1 = 第一个L_8（2^7）表中对应于因子A第i种水平的数据之和；

A_iR_2 = 第二个L_8（2^7）表中对应于因子A第i种水平

的数据之和；

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

其余类推。

对于复合因子，由于

$(CD)_1 = C_1D_1$，　$(CD)_2 = C_2D_2$

$(CD)_1 = C_1D_2$，　$(CD)_2 = C_2D_1$

可得到C，D两因子各水平与数据合计的对应关系，见表4—23所示。

表4—23

第一批试验安排				第二批试验安排			
水平 \ 试验号	因子 C	因子 D	数据	水平 \ 试验号	因子 C	因子 D	数据
1	1	1	y_1	1	1	2	y'_1
2	2	2	y_2	2	2	1	y'_2
3	1	1	y_3	3	1	2	y'_3
4	2	2	y_4	4	2	1	y'_4
5	1	1	y_5	5	1	2	y'_5
6	2	2	y_6	6	2	1	y'_6
7	1	1	y_7	7	1	2	y'_7
8	2	2	y_8	8	2	1	y'_8

不难看出：

$$C_1R_1 = D_1R_1 = I_4 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7$$

$$C_1R_2 = D_2R_2 = I'_4 = y'_1 + y'_3 + y'_5 + y'_7$$

$$C_2R_1 = D_2R_1 = \text{II}_4 = y_2 + y_4 + y_6 + y_8$$

$$C_2R_2 = D_1R_2 = \text{II}'_4 = y'_2 + y'_4 + y'_6 + y'_8$$

利用上述记号，可综合各因子离差平方和与效应估计值的计算公式为：

$$S_A = S_{\underline{A}} + S_{\underline{\underline{A}}} = 450 + 34.03 = 484.03$$

$$S_B = \frac{1}{16 \times m}\left[(B_1R_1 + B_1R_2) - (B_2R_1 + B_2R_2)\right]^2$$

$$= \frac{1}{16 \times 4}(219 - 306)^2 = 118.26 \quad (m = \text{重复数})$$

$$S_{A \times B} = S_{\underline{A} \times B} + S_{\underline{\underline{A}} \times B} = 12.5 + 52.53 = 65.03$$

$$S_C = \frac{1}{16 \times m}\left[(C_1R_1 + C_1R_2) - (C_2R_1 + C_2R_2)\right]^2$$

$$= \frac{1}{16 \times 4}(23 - 298)^2 = 1181.6$$

$$S_D = \frac{1}{16 \times m}\left[(D_1R_1 + D_1R_2) - (D_2R_1 + D_2R_2)\right]^2$$

$$= \frac{1}{16 \times 4}(146 - 175)^2 = 13.14$$

$$S_E = S_{\underline{E}} + S_{\underline{\underline{E}}} = 84.5 + 294.03 = 378.53$$

$$S_F = \frac{1}{8 \times 4}(F_1R_1 - F_2R_1)^2 = 420.5$$

$$S_G = \frac{1}{8 \times 4}(G_1R_2 - G_2R_2)^2 = 5.28$$

$$S_H = S_{\underline{H}} + S_{\underline{\underline{H}}} = 2 + 7.03 = 9.03$$

$$f_A=f_E=f_H=f_{A\times B}=3-1=2$$

$$f_B=f_C=f_D=f_F=f_G=2-1=1$$

$$S_{误}=S_{误2}^{(1)}+S_{误2}^{(2)}=428+223.75=651.75$$

$$f_{误}=f_{误2}^{(1)}+f_{误2}^{(2)}=8\times(4-1)+8\times(4-1)=48$$

$$V_{误}=S_{误}/f_{误}=13.58$$

由于S_G，S_H都比$S_{误}$小，可将它并入误差项。这样新的误差离差平方和为：

$$S_{误}^{\triangle}=S_{误}+S_G+S_H=651.75+5.28+9.03=666.06$$

$$f_{误}^{\triangle}=f_{误}+f_G+f_H=48+1+2=51$$

于是得到方差分析表4—24所示。

表4—24

方差来源	S	f	V	F	显著性
A	484.03	2	242	18.62	* *
B	118.26	1	118.26	9.09	* *
A×B	65.03	2	32.5	2.5	
C	1181.6	1	1181.6	90.89	* *
D	13.14	1	13.14	1	
E	378.53	2	189.27	14.56	* *
F	420.5	1	420.5	32.35	* *
误{G, H, 重复}	666.06	51	13		

$F_{0.01}(2,51)\doteq F_{0.01}(2,50)=5.06$ $F_{0.01}(1,50)=7.17$

检验结果证明：因子A，B，C，E，F的效应均很显著。

效应的计算，最优条件的选取总平均为：

$$\bar{y}=\frac{1}{16\times m}(y_1+y_2+\cdots+y_s+y_1'+y_2'+\cdots+y_s')$$

$$=\frac{1}{16\times m}(R_1+R_2)=\frac{1}{16\times 4}(-28+349)=5.016$$

三水平A的效应：

校正项：$W_A=\frac{1}{8\times 4}(A_2R_1-A_2R_2)$

$$=\frac{1}{32}(46-158)=-3.5$$

$$a_1=\frac{1}{4\times 4}A_1R_1-W_A-\bar{y}=-\frac{-74}{16}+3.5-5.016$$

$$=-6.14$$

$$a_2=\frac{1}{8\times 4}(A_2R_1+A_2R_2)-\bar{y}=\frac{1}{32}(46+158)-5.016$$

$$=1.36$$

$$a_3=\frac{1}{4\times 4}A_3R_2+W_A-\bar{y}=\frac{191}{16}-3.5-5.016=3.42$$

三水平E的效应：

校正项：$W_E=\frac{1}{8\times 4}(E_2R_1-E_2R_2)=\frac{1}{32}(12-126)$

$$=-3.56$$

$$e_1=\frac{1}{4\times 4}E_1R_1-W_E-\bar{y}=\frac{-40}{16}+3.56-5.016=-3.96$$

$$e_2=\frac{1}{8\times 4}(E_2R_1-E_2R_2)-\bar{y}=\frac{1}{32}(12+126)-\bar{y}=-0.7$$

$$e_3 = \frac{1}{4 \times 4} E_3 R_2 + W_E - \bar{y}$$

$$= \frac{223}{16} - 3.56 - 5.016 = 5.36$$

三水平H的效应：

校正项：$W_H = \frac{1}{8 \times 4}(H_1 R_1 - H_1 R_2)$

$$= \frac{1}{32}(-10 - 167) = -5.53$$

$$h_0 = \frac{1}{4 \times 4} H_0 R_2 + W_H - \bar{y}$$

$$= \frac{1}{16} \times 182 - 5.53 - 5.016 = 0.83$$

$$h_1 = \frac{1}{8 \times 4}(H_1 R_1 + H_1 R_2) - \bar{y}$$

$$= \frac{1}{32}(-10 + 167) - \bar{y} = 0.11$$

$$h_2 = \frac{1}{4 \times 4} H_2 R_1 - W_H - \bar{y} = -\frac{18}{16} + 5.53 - 5.016$$

$$= -0.61$$

二水平B的效应：

$$b_1 = \frac{1}{8 \times 4}(B_1 R_1 + B_1 R_2) - \bar{y}$$

$$= \frac{1}{32}(102 + 117) - 5.016 = 11.86$$

$$b_2 = \frac{1}{32}(B_2 R_1 + B_2 R_2) - \bar{y}$$

$$= 9.56 - 5.016 = 4.55$$

二水平C的效应：

$$C_1 = \frac{1}{8 \times 4} (C_1 R_1 + C_1 R_2) - \bar{y}$$

$$= \frac{1}{32} (-90 + 113) - 5.016 = -4.3$$

$$C_2 = \frac{1}{8 \times 4} (C_2 R_1 + C_2 R_2) - \bar{y}$$

$$= \frac{1}{32} (62 + 236) - 5.016 = 4.3$$

二水平D的效应

$$d_1 = \frac{1}{8 \times 4}(D_1 R + D_1 R_2) - \bar{y}$$

$$= \frac{1}{32} (113 + 62) - 5.016 = 0.45$$

$$d_2 = \frac{1}{8 \times 4} (D_2 R_1 + D_2 R_2) - \bar{y}$$

$$= \frac{1}{32} (236 - 90) - 5.016 = -0.45$$

二水平F的效应：

$$f_1 = \frac{1 \times 4}{16 \times 4} (F_1 R_1 - F_2 R_1)$$

$$= \frac{1}{16} (-72 - 44) = -7.25$$

$$f_2 = \frac{1}{16 \times 4}(F_2 R_1 - F_1 R_1) = \frac{1}{64} \times (44 + 72) = 1.81$$

二水平G的效应：

$$g_1 = \frac{1}{16 \times 4}(G_1 R_2 - G_2 R_2) = \frac{1}{64} (181 - 168) = 0.2$$

$$g_2 = \frac{1 \times 4}{16 \times 4}(G_2R_2 - G_1R_2) = \frac{1}{16}(168 - 181) = -0.80$$

根据效应的数值大小，选出最优生产条件$A_3B_1C_2D_0$ $E_3F_2G_0H_0$，而D_0，G_0，H_0的水平可任取。

在最优的水平组合下，即$A_3B_1C_2E_3F_2$

$$\mu_{优} = 35 + 3.42 + 11.86 + 4.3 + 5.36 + 1.81 + 5.016 = 66.77$$

二、部分追加法

如果用正交设计作了一批试验后发现某一个因子对指标的影响特别重要，或者某一因子对试验指标的影响有某种趋势，需要进一步考察，这时，可以对该因子添加若干新的水平，追加几个试验，以便对它的影响有更全面的了解，称这种方法为部分追加法。这种方法适用于下面几种情况：

第一在某一试验中，有一个因子的水平较多，其他因子水平较少且相等，这可选取水平数较多的因子水平数与其它因子水平数相同，将试验安排在一个普通的正交表中，然后用部分追加法再将其余水平安排于正交表中。

第二当某一正交设计试验后，发现某个因子对指标的影响非常显著，或者某个因子对指标的影响有某种趋势，我们总希望把这个因子加一些水平再试验下去，这时就要采用部分追加法，比重新安排试验简单些。

例如在某一项试验中，A因子为四水平，B、C、D因子都是二水平，不考虑交互效应，当然用并列法可以安排在L_8（2^7）表经改造后的L_8（4×2^4）表中，经过试验分析以后，发现因子A对指标的影响是单调增加的，为了进一步了解A的取值继续增大是否会得到更好的结果，需对因子A

添加一个新的水平A_5（$A_1<A_2<A_3<A_4<A_5$）进行考察。这时，采用部分追加法，用部分追加法确定这个进一步考察的试验方案，不需要另找一张正交表，再安排一批试验；而只要在原有试验的基础上追加两个试验。使前后十次试验构成一个整体，再进行统计分析就可以了。

追加的两个试验可以取为$A_5B_1C_2D_2$和$A_5B_2C_1D_1$。也就是说，只要把原来的第7、8两次试验$A_4B_1C_2D_2$和$A_4B_2C_1D_1$中的A_4换成A_5就可以了。原来$L_8(2^7)$安排的八次试验，再加上追加的两次试验。共十次试验的方案可归纳成表4—25所示，表4—25只是追加试验的一种方法，把第1、2号试验中的条件$A_1B_1C_1D_1$和$A_1B_2C_2D_2$换成$A_5B_1C_1D_1$和$A_5B_2C_2D_2$，进行追加试验也是可以的。对第3、4号。第5、6号试验类似地进行。

表4—25

水平 试验号	A 1 2 3	B 4	C 5	D 6	 7
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2
4	2	2	2	1	1
5	3	1	2	1	2
6	3	2	1	2	1
7	4	1	2	2	1
8	4	2	1	1	2
9	5	1	2	2	1
10	5	2	1	1	2

进行统计分析：

在表4—25安排的试验中，各因子的自由度是：

$\Sigma f_{因} = (5-1) + 3\times(2-1) = 7$

试验总的自由度：

$f_{总} = 10-1 = 9$

为了计算各因子效应和变动平方和，先计算出表4—26的各项结果。

表中y_1，y_2，…y_8，y'_7，y'_8，分别表示十次试验的结果。它有点象正交设计的计算表，比如Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，…等仍然表示对应于各列水平1，2，3…的数据之和；但是仔细看又不太象，因为"数据"的一栏中，第9～14号试验并没有做，它们对应的数据只是把第1—6号试验的数据重抄一遍。因此，从表4—26计算出来的各项结果是：

$$Ⅰ_A = 2(y_1+y_2)$$

$$Ⅱ_A = 2(y_3+y_4)$$

$$Ⅲ_A = 2(y_5+y_6)$$

$$Ⅳ_A = y_7+y_8$$

$$Ⅴ_A = y'_7+y'_8$$

$$Ⅰ_B = 2(y_1+y_3+y_5)+y_7+y'_7$$

$$Ⅱ_B = 2(y_2+y_4+y_6)+y_8+y'_8$$

$$Ⅰ_C = 2(y_1+y_3+y_6)+y_8+y'_8$$

$$Ⅱ_C = 2(y_2+y_4+y_5)+y_7+y'_7$$

$$Ⅱ_D = 2(y_2+y_3+y_6)+y_7+y'_7$$

通过上面各值，可计算出各效应为：

表 4—26

试验号 \ 水平 \ 因子	A 123	B 4	C 5	D 6	7	数据
1	1	1	1	1	1	y_1
2	1	2	2	2	2	y_2
3	2	1	1	2	2	y_3
4	2	2	2	1	1	y_4
5	3	1	2	1	2	y_5
6	3	2	1	2	1	y_6
7	4	1	2	2	1	y_7
8	4	2	1	1	2	y_8
9	1	1	1	1	1	y_1
10	1	2	2	2	2	y_2
11	2	1	1	2	2	y_3
12	2	2	2	1	1	y_4
13	3	1	2	1	2	y_5
14	3	2	1	2	1	y_6
15	5	1	2	2	1	$y'_7=y_9$
16	5	2	1	1	2	$y'_8=y_{10}$
Ⅰ	$\mathrm{I}_A=2(y_1+y_2)$	I_B	I_C	I_D	I_7	
Ⅱ	$\mathrm{II}_A=2(y_3+y_4)$	II_B	II_C	II_D	II_7	T
Ⅲ	$\mathrm{III}_A=2(y_5+y_6)$					
Ⅳ	$\mathrm{IV}_A=y_7+y_8$					
Ⅴ	$\mathrm{V}=y'_7+y'_8$					
S	S_A	S_B	S_C	S_D	S_7	

$$a_1 = \frac{\mathrm{I}_A}{4} - \frac{T}{16}$$

$$a_2 = \frac{\mathrm{II}_A}{4} - \frac{T}{16}$$

$$a_3 = \frac{\mathrm{III}_A}{4} - \frac{T}{16}$$

$$a_4 = \frac{\mathrm{IV}}{2} - \frac{T}{16}$$

$$a_5 = \frac{\mathrm{V}}{2} - \frac{T}{16}$$

$$b_1 = \frac{\mathrm{I}_B}{8} - \frac{T}{16} = \frac{1}{16}(\mathrm{I}_B - \mathrm{II}_B)$$

$$b_2 = \frac{\mathrm{II}_B}{8} - \frac{T}{16} = -\frac{1}{16}(\mathrm{I}_B - \mathrm{II}_B)$$

……………………………………………………

余者类推

变动平方和的修正：

根据表中计算出的各值，可以求出：

$$\widetilde{S}_A = \frac{1}{4}(\mathrm{I}_A^2 + \mathrm{II}_A^2 + \mathrm{III}_A^2) + \frac{1}{2}(\mathrm{IV}_A^2 + \mathrm{V}_A^2) - CT$$

$$\widetilde{S}_B = \frac{1}{16}(\mathrm{I}_B - \mathrm{II}_B)^2$$

$$\widetilde{S}_C = \frac{1}{16}(\mathrm{I}_C - \mathrm{II}_C)^2$$

$$\widetilde{S}_D = \frac{1}{16}(\mathrm{I}_D - \mathrm{II}_D)^2$$

$$\widetilde{S}_T = 2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2) + y_7^2 + y_8^2 + y_7'^2 + y_8'^2 - CT$$

$$\tilde{S}_{误} = \tilde{S}_T - (\tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C + \tilde{S}_D)$$

$$CT = \frac{T^2}{16}$$

因为表4—26中的16个数据并不是16次独立试验的结果，所以前面算出的$\tilde{S}_A$、$\tilde{S}_B$、$\tilde{S}_C$、$\tilde{S}_D$、$\tilde{S}_T$、$\tilde{S}_{误}$还不是真正的变动。要求出各因子和误差的变动，必须对因子和误差的变动各项进行修正。

具体的说在前面所求出的$\tilde{S}_A$，$\tilde{S}_B \cdots \tilde{S}_T$、$\tilde{S}_{误}$各量前，要乘上一个适当的修正系数，才是各因子和误差的变动。

部分追加法变动修正系数的一般公式是：

$$\frac{1}{\lambda_{因}} = \frac{1}{f_{因}} \left[\frac{3N-M}{N}(P_{因}-1) + K_{因} \right]$$

$$\frac{1}{\lambda_{误}} = \frac{1}{f_{误}} \left[2N - \frac{3N-M}{N} - \Sigma \frac{f_{因}}{\lambda_{因}} \right]$$

式中$\lambda_{因}$和$\lambda_{误}$就是修正系数，未追加试验前用正交表安排的试验称为基础试验。N表示基础试验的次数。M表示实际试验的次数。$P_{因}$表示基础试验中因子的水平数，$K_{因}$表示因子追加的水平数。

在我们的例子中：

$N = 8 \quad M = 10 \quad f_A = 4 \quad P_A = 4 \quad K_A = 1$

故 $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}\left[\frac{3 \times 8 - 10}{8} \times (4-1) + 1 \right] = \frac{25}{16}$

$$\lambda_A = \frac{16}{25}$$

又 $f_B = f_C = f_D = 1 \quad p_B = p_C = p_D = 2 \quad k_B = k_C = k_D = 0$

故 $\frac{1}{\lambda_B} = \frac{1}{\lambda_C} = \frac{1}{\lambda_D} = \frac{1}{1}\left[\frac{3 \cdot 8 - 10}{8} \times 1 + 0 \right] = \frac{7}{4}$

$$\therefore \quad \lambda_B = \lambda_C = \lambda_D = \frac{4}{7}$$

最后由 $f_{误} = 10 - [1 + 4 + 3 \times 1] = 2$

可得：$$\frac{1}{\lambda_{误}} = \frac{1}{2}\left[2\times 8 - \frac{3\times 8-10}{8} - \left(\frac{25}{16}\times 4 + \frac{7}{4}\times 3\right)\right] = \frac{11}{8}$$

$$\lambda_{误} = \frac{8}{11}$$

于是各因子和误差的变动应是：

$$S_A = \frac{16}{25}\widetilde{S}_A$$

$$S_B = \frac{4}{7}\widetilde{S}_B$$

$$S_C = \frac{4}{7}\widetilde{S}_C$$

$$S_D = \frac{4}{7}\widetilde{S}_D$$

$$S_{误} = \frac{8}{11}\widetilde{S}_{误}$$

显著性检验利用修正后的变动进行。选择最优条件，估计工程平均等各项工作与前的方法相同。其部分追加法试验的方差分析表4—27所示。

例6 某工厂装配车间使用O型密封圈，发现用此种密封圈装配的产品，在密封部分有漏油现象，经查明这是由于橡胶的压缩永久变形所引起的。工厂想通过试验掌握各影响因素的作用，以便制定O型密封圈标准。所取因子的水平是：

A：油温，$A_1 = 80℃$，$A_3 = 100℃$，$A_3 = 120℃$；

B：直径，$B_1 = \phi 3.5$，$B_2 = \phi 5.7$；

表4－27

方差来源	S	λ 修正系数	λS	f	V	F
A	S_A	λ_A	$\lambda_A S_A$	f_A	$V_A=\frac{\lambda_A S_A}{\lambda_e S_误}$	$F_A=\frac{V_A}{V_e}$
B	S_B	λ_B	$\lambda_B S_B$	f_B	$V_B=\frac{\lambda_B S_B}{\lambda_e S_误}$	$F_B=\frac{V_B}{V_e}$
C	S_C	λ_C	$\lambda_C S_C$	f_C	$V_C=\frac{\lambda_C S_C}{\lambda_e S_误}$	$F_C=\frac{V_C}{V_e}$
D	S_D	λ_D	$\lambda_D S_D$	f_D	$V_D=\frac{\lambda_D S_D}{\lambda_e S_误}$	$F_D=\frac{V_D}{V_e}$
误差	$S_误$	λ_e	$\lambda_e S_误$	f_e	$V_e=\frac{\lambda_e S_误}{f_e}$	

C：压缩率，$C_1=15\%$，$C_2=25\%$；

D：橡胶硬度，$D_1=H_S70$，$D_2=H_S90$；

E：制造厂，$E_1=$甲，$E_2=$乙；

F：油的种类，$F_1=E°_{10W}$，$F_2=E°\neq30$；

G：橡胶种类，$G_1=$丁苯橡胶，$G_2=$氯丁橡胶。

试验方案：先考察A的前两水平A_1A_2，把它和其余六个因子排入$L_8(2^7)$表作为基础试验。再追加A_3的四次试验。

试验数据如表4－28所示：

然后计算：

$$CT=\frac{1}{16}1009.8^2=63731.003$$

$$\widetilde{S}_T=2\,[90^2+82.5^2+53.2^2+71.1^2]+31.8^2+\cdots+39.6^2+45.2^2+\cdots+48.6^2-CT=5644.68$$

$$\widetilde{S}_误=5644.68-(2153.17+1350.56+131.10+549.1+170.3+76.56+1166.2)=5644.68-5596.99=47.69$$

表 4 —28

	设计 / 试验号	A	B	C	D	E	F	G	数据
		1	2	3	4	5	6	7	
基础试验	1	1	1	1	1	1	1	1	90.0
	2	1	1	1	2	2	2	2	82.5
	3	1	2	2	1	1	2	2	53.2
	4	1	2	2	2	2	1	1	71.1
	5	2	1	2	1	2	1	2	31.8
	6	2	1	2	2	1	2	1	77.2
	7	2	2	1	1	2	2	1	40.2
	8	2	2	1	2	1	1	2	39.6
	9	1	1	1	1	1	1	1	90.0
	10	1	1	1	2	2	2	2	82.5
	11	1	2	2	1	1	2	2	53.2
	12	1	2	2	2	2	1	1	71.1
追加试验	13	3	1	2	1	2	1	2	45.2
	14	3	1	2	2	1	2	1	79.2
	15	3	2	1	1	2	2	1	54.4
	16	3	2	1	2	1	1	2	48.6
	Ⅰ	593.6	578.4	527.8	458	531	487.4	573.2	
	Ⅱ	188.8	431.4	482	551.8	478.8	522.4	436.6	T= 1009.8
	Ⅲ	227.4							
	$\tilde{S}$	2153.17	1350.56	131.10	549.9	170.3	76.56	1166.2	

$p_A = p_B = \cdots = p_G = 2$

$K_A = 1 \quad K_B = K_C = \cdots = K_G = 0$

$$\frac{1}{\lambda_A} = \frac{1}{f_{因}}\left[\frac{3N-M}{N}(F_{因}-1)+K_{因}\right]$$

$$\frac{1}{\lambda_{误}} = \frac{1}{f_{误}}\left[2N-\frac{3N-M}{N}-\frac{f_{因}}{\lambda_{因}}\right]$$

$N = 8 \quad M = 14 \quad f_A = 3 - 1 = 2$

$f_B = f_C = \cdots = f_G = 2 - 1 = 1$

$f_{误} = 12 - 1 - (2 + 6 \times 1) = 3$

$$\therefore \quad \frac{1}{\lambda_A} = \frac{1}{2}\left[\frac{3\times 8-12}{8}\times(2-1)+1\right] = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{\lambda_{误}} = \frac{1}{3}\left[2\times 8-\frac{3\times 8-12}{8}-\left(\frac{5}{4}\times 2+6\times\frac{3}{2}\times 1\right)\right] = 1$$

于是，$\lambda_A = \frac{4}{5}$

$\lambda_B = \cdots \lambda_G = \frac{2}{3}$

$\lambda_{误} = 1$

各因子及误差的变动为：

$S_A = \frac{4}{5} \times 2153.17 = 1722.54$

$S_B = \frac{2}{3} \times 1350.56 = 904.87$

$S_C = \frac{2}{3} \times 131.10 = 87.84$

$S_D = \frac{2}{3} \times 549.9 = 368.43$

$S_E = \frac{2}{3} \times 170.3 = 114.10$

$S_F = \frac{2}{3} \times 76.56 = 51.29$

$S_G = \frac{2}{3} \times 1166.2 = 781.35$

$S_{误} = 47.69$

进行显著性检验，方差分析如表4—29所示。

$F_{0.05}(2, 3) = 9.55 \quad F_{0.01}(2, 3) = 30.81$

$F_{0.05}(1,\ 3) = 10.13 \quad F_{0.01}(1,\ 3) = 34.12$

表4—29

方差来源	S	f	V	F	显著性
A	1722.54	2	861.27	54.17	* *
B	904.87	1	904.87	56.91	* *
C	87.84	1	87.84	5.52	
D	368.43	1	368.43	23.17	*
E	114.10	1	114.10	7.18	
F	51.29	1	51.29	3.23	* *
G	781.35	1	781.34	49.14	
误	47.69	3	15.9		

计算各显著因子效应有：

$$a_1 = \frac{593.6}{8} - \frac{1009.8}{16} = 11.09$$

$$a_2 = \frac{188.8}{4} - \frac{1009.8}{16} = -15.91$$

$$a_3 = \frac{227.4}{4} - \frac{1009.8}{16} = -6.26$$

$$b_1 = -b_2 = \frac{1}{16}\ (518.4 - 431.4) = 9.19$$

$$d_1 = -d_2 = \frac{1}{16}\ (458 - 551.8) = -5.88$$

$$g_1 = -g_2 = \frac{1}{16}\ (573.2 - 436.6) = 8.54$$

由于试验结果的特性值，塑料变形量/压溃量（数值越小越好）。所以最好优选$A_2B_2C_0D_1E_0F_0G_2$，其中C_0、E_0、F_0因子的水平可任取，对指标无太大影响。

最优条件下工程平均估计值：

$$\mu = \frac{1009.8}{16} + (-15.91 - 9.19 - 5.86 - 8.54)$$
$$= 23.61$$

三、直积法

在橡胶、化工中，所考察的因子常可区分为配方因子和工艺条件因子，这些因子的性质是不同的，试验的目的是既要寻求好的配方，又要寻求适合于这种好的配方的工艺条件，因此常常要较多地考察这两类因子间的交互作用。这时可采用直积法。

例如某橡胶生产中，对五个因子进行试验分析；A为两种原料总量，B为两种原料的摩尔比，C为催化剂种类，它们都是三个水平；D为反应时间，E为反应温度，他们都是二水平。显然A，B，C是配方因子，D，E是工艺条件因子。假设两种因子内部的交互作用不考虑，但需要对它们之间的交互作用$A\times D$，$A\times E$，$B\times D$，$B\times E$，$C\times D$，$C\times E$，加以研究。

指标收率

表头设计

先将A，B，C按下列表头设计。

因子：A　B　C

列号：1　2　3　4

安排在$L_9(3^4)$中，得出九种配方，再把D和E按下

列表头设计

因子：D　E

列号：1　2　3

安排在$L_4(2^3)$中进行试验时，让九种配方都按这个表头设计规定的工艺条件做四次试验；这样，一共是九个配方，作$9 \times 4 = 36$个工艺条件试验。

试验结果可排入表4—30中。

试验的指标y_{ij}是收率。角标i是$L_9(3^4)$的试验序号，j是$L_4(2^3)$的试验序号。像y_{43}代表$L_9(3^4)$的第4号条件下配方在$L_4(2^3)$的第3号条件下的试验数据，即A_2、B_1、C_2、D_2、E_1的试验结果，余者类推。

表4—30

试验号＼水平	因子				试验号				水平＼因子
	A	B	C		1	2	3	4	
					1	1	2	2	1 D
					1	2	1	2	2 E
	1	2	3	4	1	2	2	1	3
1	1	1	1	1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	
2	1	2	2	2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	
3	1	3	3	3	y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	
4	2	1	2	3	y_{41}	y_{42}	y_{43}	y_{44}	
5	2	2	3	1	y_{51}	y_{52}	y_{53}	y_{54}	
6	2	3	1	2	y_{61}	y_{62}	y_{63}	y_{64}	
7	3	1	3	2	y_{71}	y_{72}	y_{73}	y_{74}	
8	3	2	1	3	y_{81}	y_{82}	y_{83}	y_{84}	
9	3	3	2	1	y_{91}	y_{92}	y_{93}	y_{94}	

这样的试验安排就是直积法。可以看出，两类因子的组合简易，每一个配方因子的水平组合都与每一个工艺因子的水平组合相配合，故可分析其交互作用。

直积法的统计分析为五个步骤：

第一步$L_9(3^4)$表的分析

$L_9(3^4)$表的同一试验序号的四个数据，即对应于$L_4(2^3)$表条件下的试验数据，都看成只是一种重复试验结果。这样，A、B、C三个因子的效应估计，离差平方和，一次误差的计算与一般分析一样，如表4—31所示。

表4—31

列号 / 试验号	A 1	B 2	C 3	4	数据	合计
1	1	1	1	1	y_{11} y_{12} y_{13} y_{14}	y_1
2	1	2	2	2	y_{21} y_{22} y_{23} y_{24}	y_2
3	1	3	3	3	y_{31} y_{32} y_{33} y_{34}	y_3
4	2	1	2	3	y_{41} y_{42} y_{43} y_{44}	y_4
5	2	2	3	1	y_{51} y_{52} y_{53} y_{54}	y_5
6	2	3	1	2	y_{61} y_{62} y_{63} y_{64}	y_6
7	3	1	3	2	y_{71} y_{72} y_{73} y_{74}	y_7
8	3	2	1	3	y_{81} y_{82} y_{83} y_{84}	y_8
9	3	3	2	1	y_{91} y_{92} y_{93} y_{94}	y_9
Ⅰ	$Ⅰ_1$	$Ⅰ_2$	$Ⅰ_3$	$Ⅰ_4$		
Ⅱ	$Ⅱ_1$	$Ⅱ_2$	$Ⅱ_3$	$Ⅱ_4$		$T=\sum_{i=1}^{9} y_i$
Ⅲ	$Ⅲ_1$	$Ⅲ_2$	$Ⅲ_3$	$Ⅲ_4$		
S	$S_1=S_A$	$S_2=S_B$	$S_3=S_C$	$S_4=S_D$		

第二步L_4（2^3）表的分析

同理，对L_4（2^3）表对应于L_9（3^4）表的各同号条件下的试验，可看成是一般的重复试验，得到D，E因子的效应估计，离差平方和与一般部分二次误差，详见表4—32所示。

表4—32

试验号＼列号	D 1	E 2	3	数　　据	合　计
1	1	1	1	y_{11} y_{21} y_{31} y_{41} y_{51} y_{61} y_{71} y_{81} y_{91}	$y_{\cdot 1}$
2	1	2	2	y_{12} y_{22} y_{32} y_{42} y_{52} y_{62} y_{72} y_{82} y_{92}	$y_{\cdot 2}$
3	2	1	2	y_{13} y_{23} y_{33} y_{43} y_{53} y_{63} y_{73} y_{83} y_{93}	$y_{\cdot 3}$
4	2	2	1	y_{14} y_{24} y_{34} y_{44} y_{54} y_{64} y_{74} y_{84} y_{94}	$y_{\cdot 4}$
Ⅰ′	I'_1	I'_2	I'_3		$T=\sum_{j=1}^{4} y_{\cdot j}$
Ⅱ′	II'_1	II'_2	II'_3		
S′	$S_D=S'_1$	$S_E=S'_2$	$S_e-S'_3$		

注　S'_e应归入二次误差中

第三步两类因子间的交互作用

将两类因子按表4—27试验结果的组合关系列成一辅助计算表，如表4—33所示。

表4—33

因子＼合计	因子 D₁	D₂	E₁	E₂	小计
A_1	l_{11}	l_{12}	p_{11}	p_{12}	I_1
A_2	l_{21}	l_{22}	p_{21}	p_{22}	II_1
A_3	l_{31}	l_{32}	p_{31}	p_{32}	III_1
B_1	m_{11}	m_{12}	g_{11}	g_{12}	I_2
B_2	m_{21}	m_{22}	g_{21}	g_{22}	II_2
B_3	m_{31}	m_{32}	g_{31}	g_{32}	III_2
C_1	n_{11}	n_{12}	r_{11}	r_{12}	I_3
C_2	n_{21}	n_{22}	r_{21}	r_{22}	II_3
C_3	n_{31}	n_{32}	r_{31}	r_{32}	III_3
小计	I_1'	II_1'	I_2'	II_2'	T

表中值是A_iD_j，$A_iE_j \cdots C_iD_j$，C_iE_j对应数据的合计，如l_{11}表示A_1D_1条件下对应数据的合计，即：

$$l_{11} = y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{12} + y_{22} + y_{32}$$

其余类推。並有下列关系存在，它是全部数据之和。

$$l_{11} + l_{12} = p_{11} + p_{12} = \mathrm{I}_1$$

$$l_{21} + l_{22} = p_{21} + p_{22} = \mathrm{II}_1$$

$$l_{31} + l_{32} = p_{31} + p_{32} = \mathrm{III}_1$$

……………………………………

$$l_{11}+l_{21}+l_{31} = m_{11}+m_{21}+m_{31} = n_{11}+n_{21}+n_{31} = \mathrm{I}_1'$$

$$l_{12}+l_{22}+l_{32} = m_{12}+m_{22}+m_{32} = n_{12}+n_{22}+n_{32} = \mathrm{II}_1'$$

……………………………………………………………………

$$T=\sum \mathrm{I}_i+\sum \mathrm{II}_i+\sum \mathrm{III}_i=\mathrm{I}_1'+\mathrm{II}_1'+\mathrm{I}_2'+\mathrm{II}_2'=\sum_{ij} y_{ij}$$

两类因子间的交互效应的离差平方和不难由辅助表计算出来。

$$S_{A\times D}=\frac{1}{2\times 3}(l_{11}^2+l_{12}^2+l_{21}^2+l_{22}^2+l_{31}^2+l_{32}^2)-S_A-S_D-CT$$

$$S_{A\times E}=\frac{1}{2\times 3}(p_{11}^2+p_{12}^2+p_{21}^2+p_{22}^2+p_{31}^2+p_{32}^2)-S_A-S_E-CT$$

$$S_{B\times D}=\frac{1}{2\times 3}(m_{11}^2+m_{12}^2+m_{21}^2+m_{22}^2+m_{31}^2+m_{32}^2)-S_B-S_E-CT$$

$$S_{C\times D}=\frac{1}{2\times 3}(n_{11}^2+n_{12}^2+n_{21}^2+n_{22}^2+n_{31}^2+n_{32}^2)-S_C-S_D-CT$$

$$CT=\frac{T^2}{9\times 4}$$

它们的效应估计值为：

$$(ao)_{ij}=\frac{l_{ij}}{3\times 2}-a_i-d_j-\frac{T}{9\times 4}$$

……………………………………………

$$(ce)_{ij}=\frac{r_{ij}}{3\times 2}-c_i-e_j-\frac{T}{9\times 4}$$

$(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2。)$

第四步误差的估计

首先计算总的离差平方和。

$S=$全部数据平方和$-CT$

$$=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{4} y_{ij}-CT$$

第一张$L_9(3^4)$正交表的总和的离差平方和

$$S^{(1)}=\frac{1}{4\times 3}\left[\mathrm{I}^2+\mathrm{II}^2+\mathrm{III}^2\right]-CT$$

第二张L_4（2^3）正交表的总和的离差平方和

$$S^{(2)}=\frac{1}{9\times 2}\left[(\mathrm{I}')^2+(\mathrm{II}')^2\right]-CT$$

则二次误差

$$S_{e2}=S-S^{(1)}-(S_D+S_E)-(S_{A\times D}+S_{A\times E}+\cdots+S_{C\times E})$$

$$f_{e2}=f-f_{e(1)}-(f_D+f_E)-(f_{A\times D}+f_{A\times E}+\cdots+f_{C\times E})$$

$$=35-8-(2\times 1+6\times 2)=13$$

第五步显著性检验

原则上用S_e（第一张表的误差项）去检验因子A、B、C。如果用S_{e2}去检验S_e为不显著时，可将两者合并使用，去检验A、B、C因子。

检验D、E（第二张正交表的因子）以及交互效应A×D、A×E、B×D、B×E、C×D、C×E，是用S_{e2}去做的，不能用合并后的误差去检验这些因子的主效应和交互效应。

四、裂区法

裂区法又叫分割法，在比较复杂的试验中，要经过好几道工序才能得出结果，这些工序重复起来难易不等，往往前道工序比后道工序重复起来困难些，而在试验过程中所考察的因子分别属于不同的工序，为了对这类试验进行设计，我们可以既按照工序的先后又按照工序重复的难易程度，把因子分类，第一类称为零次因子，没有重复；第二类为一次因子，只能一次重复，重复困难；第三类为二次因子，可重复两次；重复难度次之；……。总之，因子次数越高，其重复的难度就越低。将这些分类后的因子依次排入正交表的不同

组中，尽量使重复困难的工序少做试验，而让重复容易的工序多做些试验，这就是分割法的基本思想。

在研究常用正交表的分组时，可以发现，每一组的水平数字变化关系是有规律的。

在正交分割试验时，由于同一级（次）因子的试验单元并不独立，就会出现误差，这称为因子分次（分级）的误差。用它分组安排各次因子时，必须考虑到表头设计中去，以便分别作方差分析。所以分割法的表头设计，因子的分次（分级）误差要分别占一些列。

因子的分次，並不是任意的。试验的一次分割，因子就应分次一回。因此，一个分两次因子的试验，是分割一次，分三次因子的试验，则分割两次，……。在正交表中，每两个组可进行一次分割，像第一组与第二组，第二组与第三组，第三组与第四组能分别分割一次。但考虑到第一组只有一列，它与第二组进行分割后，则估计第一次分割的误差项就没有了位置，因此行不通。所以安排时，必须要求正交表的组数不是等于，而是要大于所考虑的因子的次数级。

分割法安排试验的基本原则，是逐次安排各种因子，同次的因子要安排在同一组内，不同次的因子要安排在不同的组，这样才能分割。

例如，在一个六因子各为二水平的试验中，A最难重复，是一次因子；B，C是二次因子；D，E，F是较容易重复的三次因子。试验有三种因子级次要分割两次，除了考察他们的主效应外，$A\times B$，$A\times D$，$B\times D$的交互效应也要研究。试验次数应大于

$$1+\Sigma f+\Sigma f_{交互}=1+1\times 6+1\times 3=10$$

正交表应具有四个组，所以，考虑采用$L_{16}(2^{15})$表

来安排。

按照分割法的安排原则，可分为三步：

第一步安排一次因子A。将A排在第2列，即第二组上。为了估计一次误差，无论有无其他一次因子，第一组和第二组是不能排二次因子的。

第二步安排二次因子B、C。将B、C安排在第三组的列中，B如果排在第4列，$A\times B$便占第5列，C就可排在第6列；第7列就可以用于估计二次误差。

第三步安排因子在第四组。D排在第8列，第9列排$A\times D$，$B\times D$一定排在第12列。E，F可任意排在这一组的其它列中，第10列排E，第13列排F，这样第11，14，15三列可作为三次误差的估计。

试验的表头设计为：

因子		A		B	$A\times B$	C		D	$A\times D$	E		$B\times D$	F		
列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
组	1组	2组		3组				4组							

分割法试验，不像一般正交设计那样将A因子的一水平连续做4次，而是将A因子的某水平试验后分割为几份。

本例题试验16次是分三道程序作两次分割来完成的。

第一道程序，对A因子的两个水平着手试验，这相当于一个单因子试验。在A_1水平下作两次，A_2水平下作两次，共试验四次。然后把每次试验后的对象分成两半，则共分八份，供第二步的试验使用。

第二道程序，按B，C两次因子的水平组合共有8种。将第一道试验后分为八份的对象每份各进行一种试验，试验完毕，每份对象再分成两份，这样就可分成16份。

第三道程序，按D，E，F三次因子的水平组合进行试验，共有16种。将第二道程序后又分两半的16份对象，每份各安排一种进行试验即可。

这样难以重复的一次因子A，试验中只重复了一次，较难重复的因子B、C每个水平各重复4次。容易重复的因子，D，E，F每个水平重复了8次。试验步骤简列成表4—34可供参考。

表4—34

试验号	一次因子试验	二次因子试验	三次因子试验	A 2	B 4	C 6	D 8	E 10	F 12
1	(3)	5	10	2	1	1	2	2	1
2			9	2	1	1	1	1	2
3		6	12	2	2	2	2	2	2
4			11	2	2	2	1	1	1
5	(2)	4	7	1	2	1	1	2	2
6			8	1	2	1	2	1	1
7		3	6	1	1	2	1	1	2
8			5	1	1	2	2	2	1
9	(4)	8	15	2	2	1	1	2	1
10			16	2	2	1	2	1	2
11		7	14	2	1	2	2	1	1
12			13	2	1	2	1	2	2
13	(1)	2	4	1	2	2	2	2	1
14			3	1	2	2	1	1	2
15		1	2	1	1	1	2	2	2
16			1	1	1	1	1	1	1

用分割法安排试验，工序较多，试验周期较长。为减少由于时间先后顺序等系统的影响，通常试验顺序都要随机化。所以表4—34中的试验安排是随机化处理后的安排。

分割法试验的分析检验，其主要特点在于对各次因子要分别用同次误差来进行检验。因为被分割的试验对象在各次试验中，并不是完全独立的。本例正交表的第1，3列提供了一次误差，可以检验一次因子的变异性。第三组的第7列提供了二次误差，可用检验二次因子B，C及A×B。第四组的剩余列（第11，14，15列）提供了三次误差，可用来检验三次因子D，E，F及A×D，B×D。而同号试验中的重复取样，则提供出四次误差。这样方差分析就如表4—35所示。

如果用S_{e2}检验，得到S_{e1}不显著时，可用$S_{e2}+S_{e1}$去检验一次因子，但S_{e1}不能用于检验二次因子。同理可依此类推，用高次的误差去检验低次误差不显著时，高次误差可以合并于低次误差中去检验低次因子。

表4—35

项　　目	方差来源	S	f	V	F	显著性
一次因子	A	S_1	1			
一次误差	误1	S_1+S_3	2			
二次因子	B	S_4	1			
	A×B	S_5	1			
	C	S_6	1			
二次误差	误2	S_7	1			

三次因子	D	S_8	1			
	A×D	S_9	1			
	E	S_{10}	1			
	B×D	S_{12}	1			
	F	S_{13}	1			
三次误差	误3	$S_{11}+S_{14}+S_{15}$	3			
四次误差	误4	$S-\sum\limits_{i=1}^{15} S_i$	16(m−1)			

通过这个例子我们对分割法试验的一般原则叙述如下：

1、把因子分成级（或次）。

2、选出适当的正交表，把一次因子排在正交表的第一组（或第一，二组），二次因子排在一次因子后面一组，依此类推，不同次的因子不要排在同一组。

3、如果有一些交互作用不可忽略，在设计时要注意不要让它们和因子混杂。用分割法交互作用有如下的规律：第一如果两个因子在不同组，则交互作用一定在两因子中较高的一组中；第二属于同一组的二因子的交互作用，其全部或一部分落在比它低的组中。

4、进行统计分析，先算出各列平方和。根据表头设计，就得到要求的因子和交互作用的平方和。在每一组内，凡表头设计未排的列，都组成误差平方和，这个误差的级别（次别）与这个组内因子的级别（次别）是一致的。

F检验时，因子是和它同级（次）的误差相比，交互作用看它位于哪一组，其检验和所在组的因子一致。

第五章　试验设计的统计基础知识

试验设计法的理论基础是数理统计。本章首先介绍数理统计中的一些基本概念，如事件、概率、正态分布、平均值、方差及F—检验准则等。然后再用这些概念从理论上说明前面几章所应用的各种方法。以便使读者能从理论上进一步加深对试验设计的认识。

第一节　事件与概率

一、事　件

人们在生产过程中观察到的各种自然现象千差万别。它们遵循着不同的规律。充分认识和掌握这些规律，是保证和提高产品质量的前提和依据。

在这些现象中，有一类现象，依据物理的、化学的或其它学科的知识，可以预言它们在某一定条件下是否一定会发生。例如，“在室温条件下，生铁不会熔化”；“在标准大气压下，纯水加热到100℃一定会沸腾”等等是一定会发生的。而上述现象的反现象：“在室温条件下，生铁会熔化”；“在标准大气压下，纯水加热到100℃不会沸腾”等则一定不会出现。我们称这类现象为确定性现象。在确定性现象中，在某一组条件下必须出现的现象称为“必然事件”；在某一组条件下一定不会出现的现象称为“不可能事件”。可见，必然事件的反面就是不可能事件。

在生产过程中，除了存在大量的确定性现象外，还存在另一类现象：在一定条件下，它们可能出现，也可能不出现。我们称这类现象为“随机现象”。“随机现象”又称为“随机事件”或偶然事件，简称事件。我们用英文大写字母A、B、C… 来表示随机事件。它们在生产过程中大量存在。例如检查一批产品，如果随便从中抽出一件产品时，可以是合格品，也可能是不合格品。于是“产品是合格品”和“产品是不合格品”都是随机事件。再如，战士们射击打耙，可能打中十环，也可能打中九环。“打中十环”和“打中九环”都是随机事件。

初看起来，就个别事件而言，随机事件是带有偶然性的。然而，如果进行大量重复试验后。再把这些大量试验结果（数据）综合在一起分析，同样可以发现随机事件有其内在的必然规律。例如，当我们检查工厂产品时，如果仅一件一件的对个别产品检查，那么“产品是合格品”或“产品是不合格品”，这当然是随机事件，没有什么规律。但是，当产品的结构定型，工艺稳定，在正常生产条件下，我们若进行大量重复检查产品时，就可以得出这一批产品质量水平的规律。如合格品率为95%，不合格品率为5%。因此，从大量测量的数据，可以发现产品质量的规律性。

同理，对个别战士的打耙结果，我们不能肯定他的射击成绩（具有偶然性质）。但是如果在一定的条件下，当战士们大量重复射击时，我们同样可以考核出他们的射击规律（命中率）。

实践证明，随机事件发生可能性的大小是其本身固有的属性和规律性。它不是随人们的主观愿望而转移，并且这一属性可以通过大量重复试验来认识和掌握的。我们称这种规

律为随机事件的统计规律。概率统计就是研究客观世界中随机事件统计规律的一门学科。“概率”则是随机事件出现可能性大小的度量。

下面，我们给出“概率”的具体定义。

设随机事件A在n次试验中发生了m次，我们称比值$\frac{m}{n}$为随机事件A出现的频率，记作f，

则 $f=\frac{m}{n}$

显然，由于$0\leq m\leq n$，故随机事件的频率是介于0与1之间。

$0\leq f\leq 1$

如果A是必然事件，则在任何试验序列中，有 $m=n$，故$f=1$（事件100%发生）；如果事件A是不可能事件，则有$m=0$，故$f=0$（一次也不能发生）。

由于随机事件出现可能性的不确定性，在不同的n次试验的序列中。事件A出现的次数可能不等，即在第一个n次试验中，事件A可能出现了m次，$f=\frac{m}{n}$。在第二个n次试验（在相同条件进行试验）中，事件A可能出现m'次，$f'=\frac{m'}{n}$。一般来说，m不一定等于m'。但是，实践表明，当n较大，重复次数很多时，随机事件A的频率具有一定的稳定性。即其频率常在一个确定的数值附近摆动。设对某产品的检验结果如表5—1所示。

表5—1

抽取件数n	10	20	120	300	1200	1800	2400	3600
合格品数m	10	14	106	262	1096	1640	2182	3262
合格品频率$=\frac{m}{n}$	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

从表5—1中可以看出，在产品质量检查中，任意抽检一件产品是合格品还是不良品完全是偶然的。然而，在大量重复的抽检中，合格品的频率总是在常数0.9左右摆动。只有在少量抽检下，频率$\frac{m}{n}$才与0.9有较显著的差异。这时便取0.9作为"产品是合格品"这一事件的概率。

二、概　率

当抽检次数n很大的情况下，如果A事件出现的频率$\frac{m}{n}$总是稳定在某一常数P附近，而频率与P有显著差异的情况又极为少见，那么，数P就是事件A的概率。记作：

$$P(A) = P$$

所以，可以说，事件A的概率就是事件A发生的频率的稳定值。由于在大量重复试验下事件A发生的频率大小反映了A发生的可能性大小。因此，概率P就客观地反映了事件A发生的可能性大小。既然概率是频率$\frac{m}{n}$（n很大，$0 \leq m \leq n$）的稳定值，故事件A的概率P(A)总是介于0与1之间的，即：

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

必然事件（常用U表示）的概率等于1，即：

$$P(U) = 1$$

不可能事件（常用V表示）的概率等于0，即：

$$P(V)=0$$

知道概率与频率之间的关系，在实践中是很有应用价值的。首先，它说明可以用频率来估计概率。比如在产品检查中，若检查10件产品中没有出现不合格品。由此则断言在这批产品中出现不合格品的概率为“0”。那与实际情况就会相差甚远。如若进行“大量试验”，即在检查10,000件产品，如发现有50件不合格品。那么，就可以用$\frac{50}{10,000}=0.005$来估计“任意抽检一件产品为不合格品”这一事件的概率。其次，我们可以用频率来解释概率。比如在方差分析的显著性检验中，我们常说“以99%的把握说因素A是显著的”。实际上说的是“因素A是显著的”这一事件发生的概率为0.99，即：

P（“因素A是显著的”）$=0.99$

用频率来解释，就是说这种方法确定因素A是显著的大概平均100次中有99次是正确的。换言之，用这种方法来检验因素A的显著性时，误把本身不是显著因素的A当成显著因素，从而犯错误的概率是0.01。这个概率称为信度（或显著性水平），常以α表示。因此，信度为0.01就意味着平均100次中大概有1次会犯上述错判的错误。

另外，当某一事件的概率非常小，非常接近“0”的事件，我们称之为“小概率事件”。小概率事件虽然不是不可能事件，但是它在大量次数的试验中出现的频率很小。可以说在一次试验中几乎是不会发生的。（但不是一定不会发生）。根据这一点形成了数理统计学的实际推断定理。这一基本原理来自实践，是符合实际经验的。比如在掷骰子（六面正方体，各面分别刻有1、2、…，6个点）中，若同时投掷五个骰子，

则五个骰子中同时都出现一个点的可能性等于 $(\frac{1}{6})^5=\frac{1}{77,776}$。这是一个小概率事件。根据人们的经验也知道它在一次投掷中将几乎是不可能发生的。再如，某工厂的不良品率为0.5%，很明显若在一次抽检中（只抽一件）如果发生了此事。那就表明，必须对这批产品进行细致的检查。实际上可能的不良品率远比0.5%高。

第二节　正态分布

在试验数据结构一节里，我们知道，任何试验结果（数据）y总可以分为两部分之和：

$$y=m+\varepsilon$$

m是常量，ε是随机变量（随机误差），而试验结果y也当然是随机变量。我们事先无法知道它们的数值是多少。然而，我们自然可以提出一个问题，随机变量的变化是否具有规律性呢？应当肯定，随机变量除了偶然性的方面外，尚有其必然性的一面。我们通过偶然性的形式可以揭露出必然性的规律来。例如，随机变量（试验误差）ε，每次取值都带有偶有性。因此"ε在 x_1 和 x_2 之间取值"，即"$x_1<\varepsilon<x_2$"是一个随机事件。它和一切事件一样。在一次试验中发生的可能性的大小是可以度量的。即概率P（$x_1<\varepsilon<x_2$）是确定的。这是它的必然性，即统计规律性的一面。下面我们将具体逐一揭示测量中随机误差的统计规律性。

设对加工某一螺栓外径尺寸长度的测量，测量值为ξ。显然，该零件有着客观的长度真值μ，（即客观测量的实际尺寸的平均值），那么，

$$\varepsilon = \xi - \mu$$

就是测量中的随机误差，上式也可以写成

$$\xi = \mu + \varepsilon$$

这就是测量值的数据结构式。根据长期测验发现随机变量ε有如下特点：

ε的取值可以布满整个区间；绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等。绝对值大的误差出现的概率小，而绝对值小的误差出现的概率大。为了使测量误差ε变化的统计规律定量化，我们首先引入概率密度函数的概念。

设ε落在区间(x_1, x_2)上的概率为：$P(x_1 < \varepsilon < x_2)$，则

$$\frac{P(x_1 < \varepsilon < x_2)}{\Delta x}$$

表示单位长度上的概率大小，是个平均密度。当$\Delta x = x_2 - x_1$无限地缩小，即x_2与x_1趋于重合，出现$x_2 \to x_1$。在这一运动过程中，上述比值取到了某一极限比值，这个比值就是x_1点上的概率密度。它是变量x_1的函数，记为$P\varepsilon(x_1)$，称为随机变量ε的概率密度函数。概率密度函数一般记为$P(x)$。可见随机变量ε的概率密度函数$P\varepsilon(x)$可知后，运用微积分知识便可求得在(x_1, x_2)上取值的概率为：

$$P(x_1 < \varepsilon < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} P\varepsilon(x)\, dx$$

用数学统计方法可以证明，具有上述特点的随机误差ε，它的概率密度函数为：

$$P\varepsilon(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$P\varepsilon(x)$的图象如图5—1。

由此可知，事件“$x_1<\varepsilon<x_2$”发生的概率为：

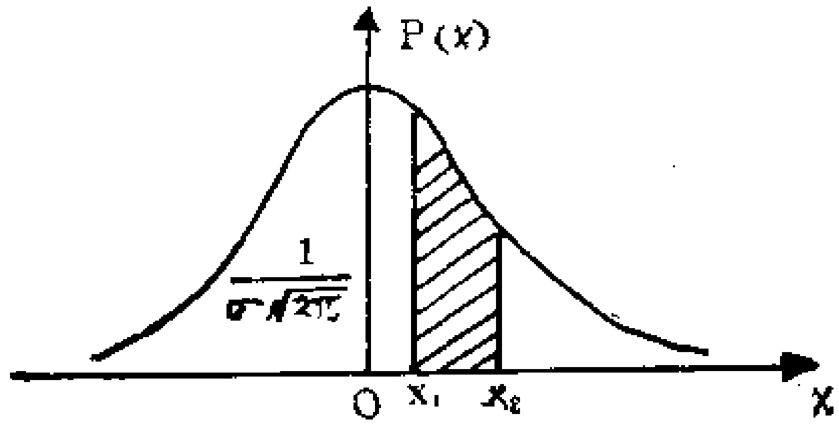


图 5—1

$$P(x_1<\xi<x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

在图5—1中，上式表现为区间(x_1, x_2)上曲线$P\varepsilon(x)$下所围成的阴影部分的面积。从图5—1中，我们同样看出概率密度$P\varepsilon(x)$具有的特点：

1、曲线与横座标所围成的面积等于1；

2、曲线以$x=\mu$这条直线为轴，左右对称，在该点函数取得最大值。

3、对μ（平均值）的正偏差和负偏差的概率相等。

4、靠近μ值的偏差出现的概率较大，远离μ的偏差出现的概率小。

整个图形中间高，两头低象个钟形。这些特点与实际测量结果是一致的。如小误差发生的概率大，大误差发生的概率小。表现在$x=0$附近的面积小；图形的对称性反映了绝对值的正负误差的概率相等。同时，ε在任一区间上取值的可能性都可以用该区间上图形所围成的面积来度量。可见，

概率密度函数$P_\varepsilon(x)$全面描述了随机误差ε的统计规律性。具有这种形式概率密度函数的随机变量称为服从正态分布的随机变量。

由上面的数据结构式可知，测量值$\xi=\mu+\varepsilon$应该在平均值μ的附近波动，ξ在μ附近的各种波动状况是由ε确定的。故ξ的概率密度函数应该和ε的概率密度函数相似。实际在图形上的区别就是把ε的概率密度函数在x轴上平移大小为μ的距离，见图5—2。

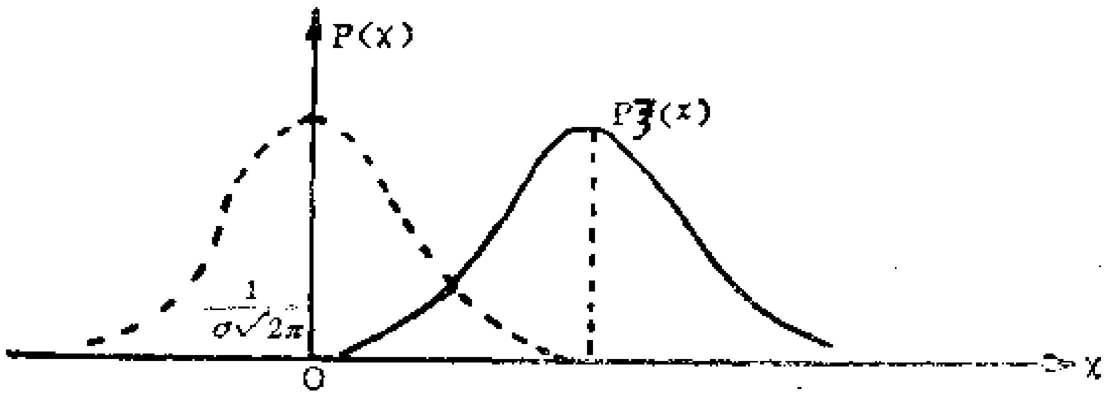


图 5—2

此时ξ的概率密度函数的表达式为：

$$P_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<\infty)$$

可见ξ也是服从正态分布。ξ服从的正态分布为N（μ，σ），ε服从的正态分布为N（0，σ）。其中μ和σ是正态分布的两个参数。μ表示曲线顶点的x坐标，σ表示曲线的形状。

μ是正态分布曲线的位置参数，它是正态分布密度曲线最高点的横坐标，如图5—2，称为正态分布的“均值”。μ的数值不同，曲线最高点的横坐标则不同。由正态分布的密

度和分布函数之间的关系可以看出：

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx=0.5$$

σ 是正态分布函数曲线的形状参数，它正好等于曲线的拐点的横坐标到μ之间的距离。它的大小反映了曲线的“胖”、“瘦”程度，如图5—3，叫做正态分布的“标准偏差”。σ越大，曲线就“矮”、“胖”，随机变量在均值μ附近的密度越小；σ越小，曲线越“高”、“瘦”，随机变量在均值μ附近的密度越大。

当σ不变，μ变动时，密度曲线的形状不变，只是其位置沿x轴移动。μ不变，σ改变时曲线的位置不变，但其“胖”和“瘦”的程度改变。

应当指出，正态分布是随机变量概率分布的最主要的分布。很多自然现象的分布都符合N（μ，σ^2）的分布。如机械加工质量，班级学生考试成绩，测量某地区人口的身高……。当然，也有许多随机变量的分布不符合正态分布。如机器寿命用威布尔（Weibull）分布，电子元件寿命用指数分

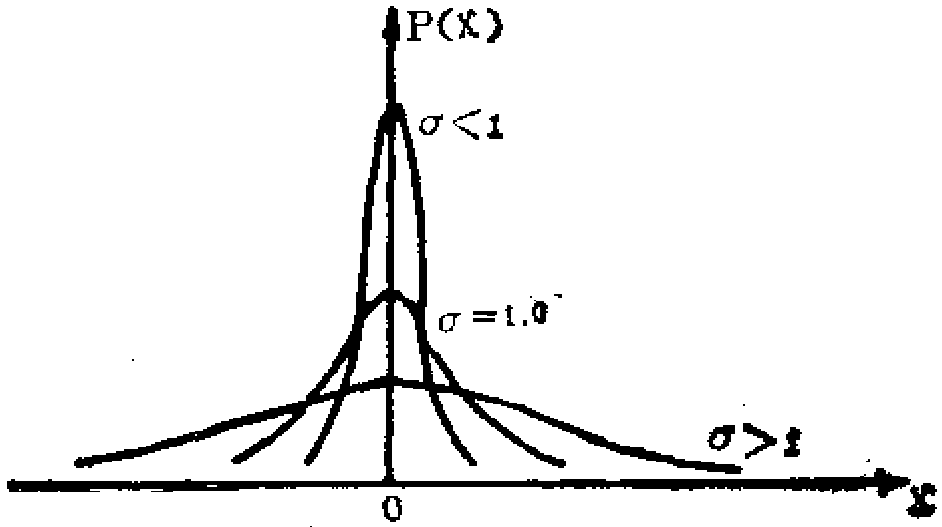


图 5—3

布……。这些随机变量的概率密度函数同正态分布是不同的。

我们在正交试验设计的方差分析中，其前提是假定数据服从正态分布。如果数据的分布不符合正态分布，而是其它分布。那么，统计分析的准确性就要受到影响。但是试验数据多数是服从正态分布的。因而应用试验设计法的范围是很广阔的。如果试验数据不服从正态分布。我们还可以利用适当的数学变换，使变换后的数据服从正态分布。

如何鉴别试验数据是正态分布呢？通常有偏态峰态检验法，χ^2检验法。这两种方法的计算比较麻烦。这里我们仅介绍一种简单而有效的判别方法，即用正态概率纸的图检验法。

正态概率纸是按正态分布的一种特殊的坐标纸，如图5—4所示。它的横坐标按普通的等距离刻度。纵坐标刻度是不均匀的，是按正态分布的规律来刻度，用以标度累计频

表5—2 **电发火管爆破压力试验数据（公斤/厘米²）**

90.8	92.4	87.4	85.9	88.7	84.9	83.4	90.3	84.3	90.7
95.1	88.3	89.8	78.5	93.0	92.5	86.2	81.9	87.7	90.8
94.7	93.5	84.5	89.9	84.9	89.5	86.2	87.5	88.4	94.4
90.4	94.7	88.6	101.7	87.6	76.7	86.5	87.9	87.4	94.6
88.5	88.8	81.3	89.3	89.4	87.6	82.6	92.7	95.9	96.3
91.7	93.7	92.5	86.9	87.6	92.3	85.7	88.4	79.6	92.6
93.9	86.7	87.6	86.1	89.9	91.4	85.4	90.5	88.8	98.7
92.7	97.8	93.8	83.7	82.7	90.7	82.8	75.2	86.7	92.7
87.9	94.0	92.6	80.4	87.5	91.3	85.9	85.6	91.6	90.8
98.7	94.5	90.3	87.0	86.7	88.4	89.0	84.0	88.4	88.3

$N=100$　　$x_{La}=101.7$　　$x_{Sm}=75.2$

率。如果我们要检查某一随机变量ξ是否服从正态分布时，可将ξ的一批试验结果(数据)标在正态概率纸上。如果ξ服从正

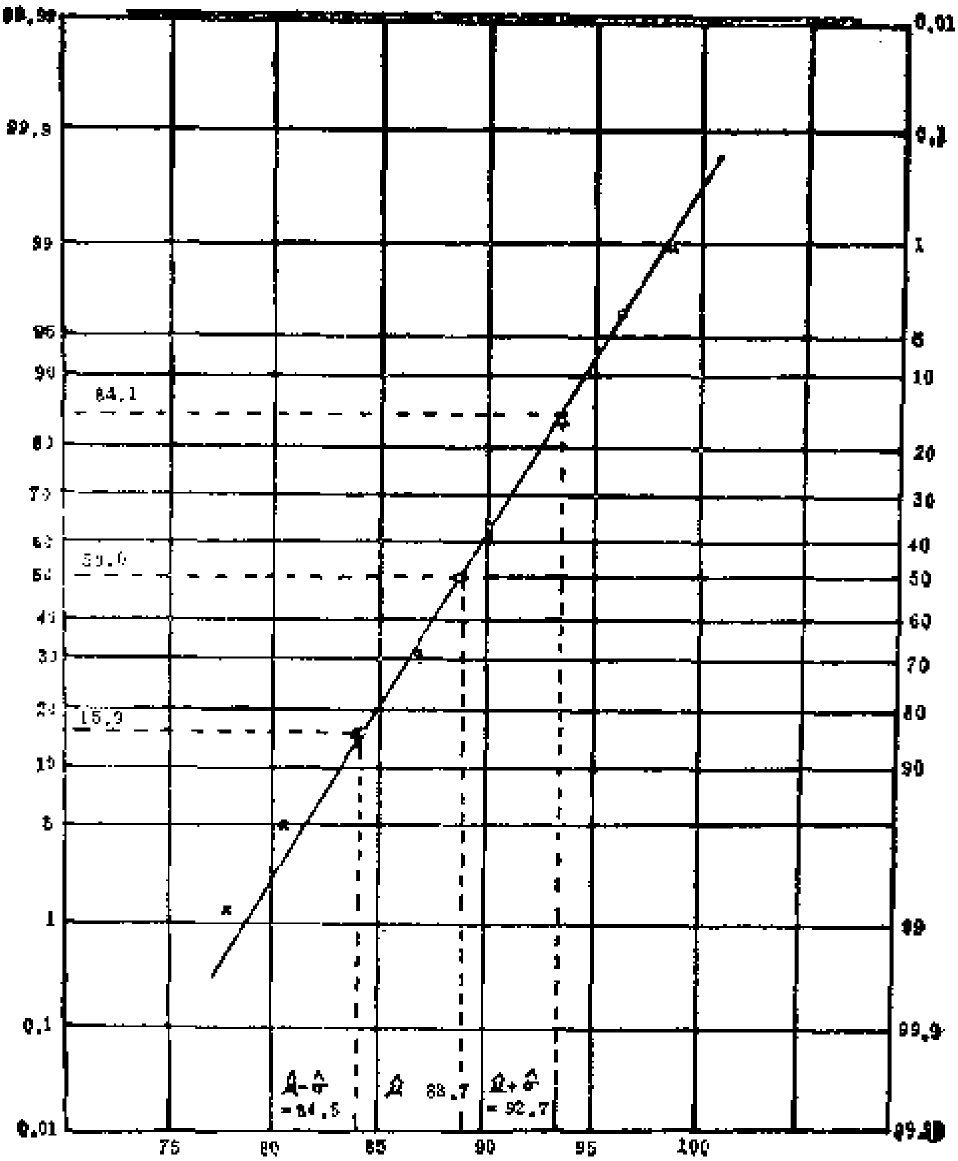


图5—4 正态概率纸

态分布，则标出的点必在一条直线上；如果所标出的点很分散，不在一条直线上，则说明随机变量ξ不服从正态分布。下面举例说明检验步骤。

例5.1 某厂生产电发火管，数据如表5—2。

1、收集一批稳定生产条件下的特性值数据，如例5.1（表5—2）。

2、计算累计频率。若数据较少，可将数据由小到大重新排列，并按公式：

$$F_i = \frac{i - 0.3}{N + 0.4}$$

计算第i个数据 $x^{(i)}$ 出现的累计频率。若数据较多时，可仿照作直方图过程，对数据进行分组，计算至各组右端值为止的累计频率F_i：

$$F_i = \sum_{i=1}^{i} f_i = \sum_{i=1}^{i} \frac{n_i}{N}$$

其中 N——样本容量；

n_i——第i组内的频数；

f_i——第i组的频率。

按此规定算出电发火管的累积频率如表5—3。

表5—3 **电发火管各组的累计频率**

组 号	各组右边界值	n_i	f_i	F_i
1	78.05	2	0.02	0.02
2	81.05	3	0.03	0.05
3	84.05	8	0.08	0.13
4	87.05	18	0.18	0.31
5	90.05	30	0.30	0.61
6	93.05	23	0.23	0.84
7	96.05	12	0.12	0.96
8	99.05	3	0.03	0.99
9	102.05	1	0.01	1.00

3、在正态概率纸上按特性值x的取值范围标上适当的尺寸，将点（$x^{(i)}$，F_i）标在正态概率纸上，其中$x^{(i)}$是当N小时自小而大重新排列的特性值。当N大时为各组右边界值；F_i为累计频率。

4、根据正态概率纸上标出的各点（$x^{(i)}$，F_i）的散布情况作出判断。若各点基本处于一条直线上则特性值x为正态变量，否则不服从正态分布。此时首末两点可不予考虑。

我们将电发火管点标在正态概率纸上，见图5—4。可见各点基本处于一直线上。所以，认为电发火管的爆破压力服从正态分布。

第三节　F检验准则

在前面各种正交试验方法的统计分析中，特别是用方差分析方法时，我们必须分析各因素及其交互作用的大小，以及试验误差的大小，即估计出S_i和S_e的大小。然后，才能进行显著性检验。为了解决这个问题，首先要区别放因素或交互作用列的偏差平方和与不放因素和交互作用的偏差平方和有什么不同。即要解决前者是由于某因素水平不同引起试验指标的不同，后者是由于某一因素同水平试验误差对指标的影响。

为此，我们仍然用例1、2，以A、B、C、D四个二水平因素及其交互作用A×B为例来加以说明。其表头设计如下表所示。

表头设计	A	B	A×B	C			D
列　号	1	2	3	4	5	6	7

其试验结果的数据结构式见第三章。我们可以知道，第j列的偏差平方和为

$$S_j = \frac{(\mathrm{I}_j - \mathrm{II}_j)^2}{8}$$

其中I_j，II_j分别表示第j列"1"水平和"2"水平对应数据之和。为了搞清S_j的含义，我们将数据结构式代入S_j，并求出它们的平均值E（S_j），具体对S_1的计算如下：

$$\begin{aligned}
E(S_1) &= E\left[\tfrac{1}{8}(\mathrm{I}_1 - \mathrm{II}_1)^2\right] \\
&= \tfrac{1}{8}E(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8)^2 \\
&= \tfrac{1}{8}E(4a_1 - 4a_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 - \varepsilon_8)^2 \\
&= \tfrac{1}{8}\left[16(a_1 - a_2)^2 + 8\sigma^2\right] \\
&= 2(a_1 - a_2)^2 + \sigma^2
\end{aligned}$$

可见S_1不是σ^2的无偏估计。从式中可以看出$a_1 \neq a_2$。即σ^2中除了试验误差外。还包括两个水平之差异（因二者效应不等）。即当A的两个水平对应数据的贡献一样时，S_1就成为σ^2的无偏估计（$E(S_1)=\sigma^2$），这里S_1的自由度是1，类似计算还有：

$E(S_2) = 2(b_1 - b_2)^2 + \sigma^2$ $\qquad f_2 = 1$

$E(S_3) = 2\left[(ab)_{11} + (ab)_{22} - (ab)_{12} - (ab)_{21}\right]^2 + \sigma^2$ $\qquad f_3 = 1$

$E(S_4) = 2(C_1 - C_2)^2 + \sigma^2$ $\qquad f_4 = 1$

$E(S_5) = E(S_6) = \sigma^2$ $\qquad f_5 = f_6 = 1$

$E(S_7) = 2(d_1 - d_2)^2 + \sigma^2$ $\qquad f_7 = 1$

上述计算结果说明：

（1）凡因素所占的列，其偏差平方和不仅含有随机误差的方差σ^2，而且包含了因素的两个水平差异的大小。只有当因素两个水平对数据的贡献没有差别（效应相等）。该列

的偏差平方和才是σ^2的无偏估计，自由度为1。通常，S_1可记为S_A，S_2可记为S_B等等。

（2）不放因素的空白列，其偏差平方和是σ^2的无偏估计，自由度为1。为使估计精确起来，常常采用增加自由度的办法。例如将空白列合并起来估计σ^2，即令

$$S_e = S_5 - S_6, \qquad f_e = f_5 + f_6 = 1 + 1 = 2$$

$$E(S_e) = E(S_5 + S_6) = E(S_5) + E(S_6) = 2\sigma^2$$

故$\frac{S_e}{f_e}$可以用来估计σ^2。

获得了随机误差ε_a的方差的估计值后，下一步问题就是如何判断因素的水平间是否有显著差异。一般采用先作出原假定：因素的水平间没有显著差异，然后设法判断原假设是否成立，如果推翻原假设，自然就接受了因素的水平间有显著差异的结论。下面我们以本例中因素C的显著性检验来说明显著性检验的过程和依据。

首先，原假设C的水平间没有差异，即C的两个水平的效应满足$C_1 = C_2$。于是S_c与$\frac{S_e}{f_e}$都为σ^2的无偏估计，作比值

$$F_C = \frac{S_c/f_c}{S_e/f_e} = \frac{S_c/1}{S_e/2}$$

由于S_c和S_e可由试验结果数据$y_a(a = 1, 2, \cdots, 8)$求得，而y_a是随机变量。因此比值F_c也是一个随机变量，一般记为$F_{比}$。它和一切随机变量一样，取值有一定的统计规律。然而这一种规律不是上面讲过的正态分布，而是服从另一种分布——F分布。其概率密度函数曲线如图5—5所示而概率密度函数的表达式为

$$P(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{f_1+f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{f_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{f_2}{2}\right)}f_1^{\frac{f_1}{2}}\ f_2^{\frac{f_2}{2}}\dfrac{x^{\frac{f_1}{2}-1}}{(f_2+f_1x)^{\frac{1}{2}(f_1+f_2)}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

其中Γ（x）是Γ——函数在X点的值，当x为正整数n时，有

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 1=n!$$

f_1，f_2称为F分布的两个参数，f_1是比值分子的自由度，f_2是比值分母的自由度。因此，F分布记为F（f_1，f_2），不同的f_1，f_2，密度函数与曲线就不同。F分布的具体数值可查F分布表。

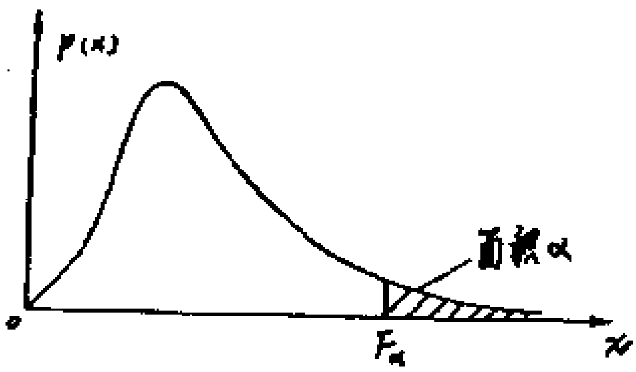


图 5—5

从图5—5可以看出F分布的密度函数P（x）的图象是从零点开始，先升高后降低，右端伸展到无穷远点。整条曲线与x轴所夹的面积就是概率，其值为1。对每一对具体的f_1，f_2就确定了一条形状类似的曲线。显然，在x轴上任意给出一个数x＝Fα，随机变量F比取值可能大于Fα，也可能小

于F_α。事件“$F_{比}>F_\alpha$”的概率等于图中阴影部分的面积。即P（$F_{比}>F_\alpha$）$=\alpha$。当F_α值增大时，相应的点就在x轴上右移，阴影部份的面积变小，故F_α很大时，P（$F_a>F_\alpha$）就很小。一般当$\alpha=0.05$时，即$P(F_{比}>F_{0.05})=0.05$。就认为“$F_{比}>F_{0.05}$”是一个小概率事件。而小概率事件在一次试验中几乎是不会发生的。如果当真发生，就要追查原因，推翻某些错误的原因。我们采用这种想法来判断因素的显著性。即用假设检验方法进行显著性判断。

对于因素A，原假设：$a_1=a_2$时，

$$F_A=\frac{S_A/f_a}{S_e/f_e}=\frac{S_A/2}{S_e/2}$$

服从F（2,2）分布，从例1.1可得，

$$F_A=\frac{21.64}{3.94}=5.49$$

而$\alpha=0.05$时（2,2）=19，由于$F_A<F_{0.05}$，$5.49<19$。所以，$a_1=a_2$是合理的。而判断因素A的两个水平没有显著性差异。因为$F_A<F_{0.05}$的概率为0.95，是个大概率事件。因此，在确定试验方案时，选择哪个水平影响不大。不过这种判断结论也可能犯错误，而犯错误的概率为0.05，即$1-\alpha=95\%$的把握判断是正确的。

再看因子B在原假设：$b_1=b_2$时，比值

$$F_B=\frac{S_B/2}{S_e/2}=0.44$$

它也服从F(2，2)分布。现在$F_B=0.44\ll F_{0.05}(2,2)=19$，而$F_B<F_{0.05}$的概率为0.95，是个大概率事件，在一次试验中往往要发生。因此，没有理由推翻原假设。只能把B看成是没有影响的因素，即A因素可在两个水平中任选一

个。

上述利用F分布检验因素显著性的方法称为F——检验准则。

第四节　正交表灵活运用中统计分析的简单说明

本节着重介绍重复试验和重复取样，以及正交表灵活运用中正交表并列法，拟因素法等的统计分析的依据，其目的要达到：

首先要掌握上述方法中所使用的误差平方和S_e的自由度f_e，并证实S_e/f_e是试验误差的方差σ^2的无偏估计。其次，要掌握各因素偏差平方和和$S_{因}$的自由度$f_{因}$。并证实$E(S_{因})$不仅包括有该因素的方差σ^2，而且包含有该因素的水平间差异。并且只有当因素各水平的效应相等时，$S_{因}/f_{因}$才是σ^2的无偏估计。可见，解决了这两个问题，用F—检验准则来检验因素的显著性就是合理的。下面将分别加以说明。

一、关于重复试验和重复取样

当我们对因素正交试验进行方差分析时。通常以空白列做为误差偏差平方和S_e的值。倘若正交表已被各因素列占满，此时对S_e值便无法估算，多半选用更大的正交表或用重复试验或重复取样方法解决。

现仍以例3.4某化学反应为例，催化剂的粒度取二水平，催化剂对反应物资的相对速度B取二水平。采用$L_4(2^3)$正交表进行试验。每号重复试验5次，其表头设计及试验结果如表5—4所示。

表 5—4

表头设计	A	B		试 验 结 果（产量）
试验序号 \ 列号	1	2	3	（公斤／小时）
1	1	1	1	$y_{11}=10$ $y_{12}=9$ $y_{13}=11$ $y_{14}=10$ $y_{15}=11$
2	1	2	2	$y_{21}=12$ $y_{22}=11$ $y_{23}=13$ $y_{24}=13$ $y_{25}=12$
3	2	1	2	$y_{31}=17$ $y_{32}=16$ $y_{33}=18$ $y_{34}=16$ $y_{35}=18$
4	2	2	1	$y_{41}=12$ $y_{42}=11$ $y_{43}=13$ $y_{44}=12$ $y_{45}=10$

每号重复试验 5 次，即 $m=5$，

这时数据的结构式：

$$
\begin{aligned}
y_{1i} &= \mu + a_1 + b_1 + \varepsilon_{1i}, \\
y_{2i} &= \mu + a_1 + b_2 + \varepsilon_{2i}, \qquad (i=1,2,3,4,5) \\
y_{3i} &= \mu + a_2 + b_1 + \varepsilon_{2i}, \\
y_{4i} &= \mu + a_2 + b_2 + \varepsilon_{4i}。
\end{aligned}
$$

其中随机误差 ε_{Ki}（$K=1,2,3,4$；$i=1,2,3,4,5$）是相互独立服从同一分布（0，6）的正态分布。同时各效应应满足下列关系：每个因素各水平效应之和总应等于 0。

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 0$$

由上面数据结构式可知

$$y_1 = \sum_{i=1}^{5} y_{1i} = 5\mu + 5a_1 + 5b_1 + \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_{1i},$$

$$y_2 = \sum_{i=1}^{5} y_{2i} = 5\mu + 5a_1 + 5b_2 + \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_{2i},$$

$$y_3 = \sum_{i=1}^{5} y_{3i} = 5\mu + 5a_2 + 5b_1 + \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_{3i},$$

$$y_4=\sum_{i=1}^{5} y_{4i}=5\mu+5a_2+5b_2+\sum_{i=1}^{5}\varepsilon_{4i}.$$

根据表头设计可以得出第一类误差平方和的平均值为

$$E(S_{e1})=E(S_3)=E\left[\frac{(\mathrm{I}_3-\mathrm{II}_3)^2}{4m}\right]$$

$$=E\left\{\frac{\left[\sum_{i=1}^{5}(\varepsilon_{1i}+\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{3i})\right]^2}{4\times 5}\right\}$$

$$=\frac{1}{20}\times 20б^2=б^2$$

由此可知，$S_{e1}/1$是$б^2$的无偏估计，$f_{e1}=f_3=1$，因素的偏差平方和的平均值为

$$E(S_A)=E(S_1)=E\left[\frac{(\mathrm{I}_1-\mathrm{II}_1)^2}{4m}\right]$$

$$=E\left\{\frac{\left[10(a_1-a_2)+\sum_{i=1}^{5}(\varepsilon_{1i}+\varepsilon_{2i}-\varepsilon_{3i}-\varepsilon_{4i})\right]^2}{4\times 5}\right\}$$

$$=\frac{1}{20}\left[100\times(a_1-a_2)^2+20б^2\right]=5(a_1-a_2)^2+б^2$$

可见当$a_1=a_2$时，$S_A/1$是$б^2$的无偏估计，$f_B=f_1=1$。

上面计算只说明，可以用第一类误差来检验的显著性。下面进行分析在重复试验下产生的第二类误差，它的偏差平方和计算公式为：

$$S_{e2}=\sum_{k=1}^{4}\Delta k$$

其中 $\Delta k=\sum_{i=1}^{5}(y_{Ki}-\bar{y}_K)^2 \quad (K=1,2,3,4)$

以Δ_1为例计算一下E（Δ_1），由数据结构式可知，

$$\bar{y}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_{1i}=\frac{1}{5}(5\mu+5a_1+5b_1+\sum_{i=1}^{5}\varepsilon_{1i})$$

$$=\mu+a_1+b_1+\bar{\varepsilon}_1$$

其中 $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\varepsilon_{1i}$， 由此得

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{5}(y_{1i}-\bar{y}_1)^2=\sum_{i=1}^{5}(y_{1i}-\bar{\varepsilon}_1)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{5}(\varepsilon_{1i}^2-2\varepsilon_{1i}\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_1^2)=\sum_{i=1}^{5}\varepsilon_{1i}^2-5\bar{\varepsilon}_1^2$$

$$E(\Delta_1)=E\left[\sum_{i=1}^{5}\varepsilon_{1i}^2-5\bar{\varepsilon}_1^2\right]=\sum_{i=1}^{5}E(\varepsilon_{1i}^2)-5E(\bar{\varepsilon}_1^2)$$

$$=5\sigma^2-5\cdot\frac{\sigma^2}{5}=4\sigma^2$$

可见，$\Delta_1/4$是σ^2的无偏估计，$f_{\Delta_1}=4$，

即$f_{\Delta_1}=$（重复试验数m）$-1=5-1=4$

同理

E（Δ_2）＝E（Δ_3）＝E（Δ_4）＝$4\sigma^2$

$f_{\Delta_2}=f_{\Delta_3}=f_{\Delta_4}=m-1=5-1=4$

因此，

$$E(S_{e2})=E(\sum_{k=1}^{4}\Delta k)=\sum_{k=1}^{4}E(\Delta k)$$

$$= 4 \times 4\sigma^2 = 16\sigma^2$$

由此可见，$S_{e2}/16$是σ^2的无偏估计，$f_{e2} = 16$。即f_{e2}满足关系式：

$$f_{e2} = \sum_{k=1}^{n} f\Delta_K = n\ (m-1)$$

其中n是正交表中的试验次数，本例$n = 4$；m是每号试验的重复数，本例$m = 5$。

上述计算表示，在重复试验下，从第一类误差S_{e1}和第二类误差S_{e2}都可以获得σ^2的无偏估计。如果为了提高计量的精确度，可将其合并，

$$S_e = S_{e1} + S_{e2}, \qquad f_e = f_{e1} + f_{e2}$$

此时

$$E\ (S_e) = E\ (S_{e1} + S_{e2}) = E\ (S_{e1}) + E\ (S_{e2})$$
$$= \sigma^2 + 16\sigma^2 = 17\sigma^2$$
$$f_e = f_{e1} + f_{e2} = 1 + 16 = 17$$

所以，S_e/f_e是σ^2的无偏估计，因而，用合并后的误差来检验因素的显著性是合理的。

至于在同一个试验中，同时抽取n个样品进行测试，即重复取样。一般来说，重复试验的数据可以用来估计试验误差。而重复取样得到的数据也可以用来估计试验误差。只是试验误差比试样误差大。因为试样误差只是局部误差，但如果两者相差不大时也可以用来检验因素的显著性。此时用它估计试验误差可以节约人力、时间和资金。

二、并列法

本节主要讨论正交表并列——同时安排四水平和二水平

试验的统计分析问题。

例5.4 某种金属材料的退火试验中，要考虑 A、B、C、D 四种因素对材料硬度的影响。其中A因素取四个水平，B、C、D各取二水平，还要考虑交互作用 $A\times B$、$A\times C$，这是 $4^1\times 2^3$ 因素的试验设计问题。我们选用 $L_{16}(2^{15})$ 正交表，其表头设计如下表所示：

表头	A			B	A×B			C	A×C			D			
列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

根据表头设计可写出数据结构式：

$$y_1=\mu+a_1+b_1+(ab)_{11}+c_1+(ac)_{11}+d_1+\varepsilon_1,$$
$$y_2=\mu+a_1+b_1+(ab)_{11}+c_2+(ac)_{12}+d_2+\varepsilon_2,$$
$$y_3=\mu+a_1+b_2+(ab)_{12}+c_1+(ac)_{11}+d_2+\varepsilon_3,$$
$$y_4=\mu+a_1+b_2+(ab)_{12}+c_2+(ac)_{12}+d_1+\varepsilon_4,$$
$$y_5=\mu+a_2+b_1+(ab)_{21}+c_1+(ac)_{21}+d_1+\varepsilon_5,$$
$$y_6=\mu+a_2+b_1+(ab)_{21}+c_2+(ac)_{22}+d_2+\varepsilon_6,$$
$$y_7=\mu+a_2+b_2+(ab)_{22}+c_1+(ac)_{21}+d_2+\varepsilon_7,$$
$$y_8=\mu+a_2+b_2+(ab)_{22}+c_2+(ac)_{22}+d_1+\varepsilon_8,$$
$$y_9=\mu+a_3+b_1+(ab)_{31}+c_1+(ac)_{31}+d_1+\varepsilon_9,$$
$$y_{10}=\mu+a_3+b_1+(ab)_{31}+c_2+(ac)_{32}+d_2+\varepsilon_{10},$$
$$y_{11}=\mu+a_3+b_2+(ab)_{32}+c_1+(ac)_{31}+d_2+\varepsilon_{11},$$
$$y_{12}=\mu+a_3+b_2+(ab)_{32}+c_2+(ac)_{32}+d_1+\varepsilon_{12},$$
$$y_{13}=\mu+a_4+b_1+(ab)_{41}+c_1+(ac)_{41}+d_1+\varepsilon_{13},$$
$$y_{14}=\mu+a_4+b_1+(ab)_{41}+c_2+(ac)_{42}+d_2+\varepsilon_{14},$$
$$y_{15}=\mu+a_4+b_2+(ab)_{42}+c_1+(ac)_{41}+d_2+\varepsilon_{15},$$
$$y_{16}=\mu+a_4+b_2+(ab)_{42}+c_2+(ac)_{42}+d_1+\varepsilon_{16}.$$

其中ε_i（$i=1, \cdots, 16$）是相互独立，服从同一分布N（0，σ）的随机变量。各效应参数间满足关系式：

$$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2=c_1+c_2=d_1+d_2=0,$$

$$(ab)_{11}+(ab)_{12}=(ab)_{21}+(ab)_{22}$$

$$=(ab)_{31}+(ab)_{32}=(ab)_{41}+(ab)_{42}=0,$$

$$(ab)_{11}+(ab)_{21}+(ab)_{31}+(ab)_{41}$$

$$=(ab)_{12}+(ab)_{22}+(ab)_{32}+(ab)_{42}=0,$$

$$(ac)_{11}+(ac)_{12}=(ac)_{21}+(ac)_{22}$$

$$=(ac)_{31}+(ac)_{32}=(ac)_{41}+(ac)_{42}=0,$$

$$(ac)_{11}+(ac)_{21}+(ac)_{31}+(ac)_{41}$$

$$=(ac)_{12}+(ac)_{22}+(ac)_{32}+(ac)_{42}=0。$$

当并列时，各因素和交互作用的偏差平方和的计算公式已在第四章中给出。这里我们着重计算它们的平均值E($S_{因}$)来说明F检验的合理性。首先计算四水平因素A的偏差平方和S_A的平均值：

$$E(S_A)=E\left[\frac{\mathrm{I}_A^2+\mathrm{II}_A^2+\mathrm{III}_A^2+\mathrm{IV}_A^2}{4}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{16} y_i\right)^2}{16}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[(4\mu+4a_1)^2+(4\mu+4a_2)^2+(4\mu+4a_3)^2\right.$$

$$\left.+(4\mu+4a_4)^2+16\sigma^2\right]-\frac{16^2\mu^2+16\sigma^2}{16}$$

$$=4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+3\sigma^2$$

由此可知，当$a_1=a_2=a_3=a_4=0$时，S_A/f_A是σ^2的无偏估计，$f_A=3$。其它各列E（$S_{因}$）的计算类似，从略。至于交互作用，如A×B，有

$$S_{A\times B}=S_5+S_6+S_7,\ f_{A\times B}=f_5+f_6+f_7=1+1+1=3$$

可以验证，当

$$(ab)_{11}=(ab)_{12}=(ab)_{21}=(ab)_{22}=(ab)_{31}=(ab)_{32}$$
$$=(ab)_{41}=(ab)_{42}=0$$

的条件下，S_5，S_6，S_7分别是σ^2的无偏估计，从而

$$E(S_{A\times B}/f_{A\times B})=\frac{1}{3}E(S_{A\times B})=\frac{1}{3}E(S_5+S_6+S_7)$$
$$=\frac{1}{3}E[E(S_5)+E(S_6)+E(S_7)]$$
$$=\frac{1}{3}(\sigma^2+\sigma^2+\sigma^2)=\sigma^2$$

即$S_{A\times B}/f_{A\times B}$在同条件下也是$\sigma^2$的无偏估计。与此类似也可算出$S_{A\times C}/f_{A\times C}$在交互作用为零的条件下也是$\sigma^2$的无偏估计，其中

$$S_{A\times C}=S_9+S_{10}+S_{11}，\quad f_{A\times C}=f_9+f_{10}+f_{11}=3$$

三、拟因素法

例5.5 某种农药的试制中，主要考虑A、B、C、D、E、F六种因素对其收率的影响。其中A、B、D、F四因素为三水平，C、E两因素为二水平，交互作用为B×C和E×F，这是$3^4\times2^2$因素的试验问题。

其自由度：

$$f_A=f_B=f_D=f_F=3-1=2$$
$$f_C=f_E=2-1=1$$
$$f_{B\times C}=f_{E\times F}=(2-1)\times(3-1)=2$$

所以总共需要$4\times2+2\times1+2\times2=14$个自由度。我们用拟因素设计，把这个试验排入二水平正交表$L_{16}(2^{15})$中，只要做16次试验就行了。其表头设计如下：

表头	赋闲	A		B		F		C	E	D		B×C		E F	
列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

根据表头设计得数据结构式为

$$y_1=\mu+a_1+b_1+c_1+d_1+e_1+f_1+(bc)_{11}+(ef)_{11}+\varepsilon_1,$$
$$y_2=\mu+a_1+b_1+c_2+d_2+e_2+f_1+(bc)_{12}+(ef)_{21}+\varepsilon_2,$$
$$y_3=\mu+a_1+b_2+c_1+d_1+e_1+f_2+(bc)_{21}+(ef)_{12}+\varepsilon_3,$$
$$y_4=\mu+a_1+b_2+c_2+d_2+c_2+f_2+(bc)_{22}+(ef)_{22}+\varepsilon_4,$$
$$y_5=\mu+a_2+b_1+c_1+d_3+e_1+f_2+(bc)_{11}+(ef)_{12}+\varepsilon_5,$$
$$y_6=\mu+a_2+b_1+c_2+d_1+e_2+f_2+(bc)_{12}+(ef)_{22}+\varepsilon_6,$$
$$y_7=\mu+a_2+b_2+c_1+d_2+e_1+f_1+(bc)_{21}+(ef)_{11}+\varepsilon_7,$$
$$y_8=\mu+a_2+b_2+c_2+d_1+e_2+f_1+(bc)_{22}+(cf)_{21}+\varepsilon_8,$$
$$y_9=\mu+a_2+b_2+c_1+d_2+e_2+f_2+(bc)_{21}+(cf)_{22}+\varepsilon_9,$$
$$y_{10}=\mu+a_2+b_2+c_2+d_3+e_1+f_2+(bc)_{22}+(ef)_{12}+\varepsilon_{10},$$
$$y_{11}=\mu+a_2+b_3+c_1+d_2+e_2+f_3+(bc)_{31}+(ef)_{23}+\varepsilon_{11},$$
$$y_{12}=\mu+a_2+b_3+c_2+d_3+e_1+f_3+(bc)_{32}+(ef)_{13}+\varepsilon_{12},$$
$$y_{13}=\mu+a_3+b_2+c_1+d_3+e_2+f_3+(bc)_{21}+(ef)_{23}+\varepsilon_{13},$$
$$y_{14}=\mu+a_3+b_2+c_2+d_2+e_1+f_3+(bc)_{22}+(ef)_{13}+\varepsilon_{14},$$
$$y_{15}=\mu+a_3+b_3+c_1+d_3+e_2+f_2+(bc)_{31}+(ef)_{22}+\varepsilon_{15},$$
$$y_{16}=\mu+a_3+b_3+c_2+d_2+e_1+f_2+(bc)_{32}+(ef)_{12}+\varepsilon_{16}。$$

其中ε_i（$i=1, \cdots, 16$）是相互独立且服从同一分布N（0，6）的随机变量，各效应参数间满足关系式：

$$a_1+2a_2+a_3=b_1+2b_2+b_3=c_1+c_2$$
$$=d_1+2d_2+d_3=e_1+e_2=f_1+2f_2+f_3=0,$$
$$(bc)_{11}+(bc)_{12}=(bc)_{21}+(bc)_{22}=(bc)_{31}+(bc)_{32}=0,$$
$$(bc)_{11}+2(bc)_{21}+(bc)_{31}=(bc)_{12}+2(bc)_{22}+(bc)_{32}=0,$$
$$(ef)_{11}+2(ef)_{12}+(ef)_{13}=(ef)_{21}+2(ef)_{22}+(ef)_{23}=0,$$
$$(ef)_{11}+(ef)_{21}=(ef)_{12}+(ef)_{22}=(ef)_{13}+(ef)_{23}=0。$$

在拟因素设计下，各因素和交互作用的偏差平方和的计算公式已在第四章给出。这里主要计算它们的平均值$E(S_{因})$

来说明F检验的合理性。

我们先计算赋闲列偏差平方和的平均值：

$$E(S_1)=E\left[\frac{(\mathrm{I}_1-\mathrm{II}_1)^2}{16}\right]$$

$$=\frac{(4a_1-4a_3+4b_1-4b_3+4d_1-4d_3+4f_1-4f_3)^2}{16}+\frac{16\sigma^2}{16}$$

$$=(a_1-a_3+b_1-b_3+d_1-d_3+f_1-f_3)^2+\sigma^2$$

计算结果表明，第一列的偏差平方和 S_1 中包含许多因素水平的差异。因此，它既不能用来安排新因素，也不能用做误差的估计，只能按赋闲处理。关于三水平因素，以A因素为例，计算偏差平方和的平均值如下：

$$E(S_2)=E\left[\frac{(\mathrm{I}_2-\mathrm{II}_2)^2}{16}\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[E(4a_1-4a_3)^2+16\sigma^2\right]$$

$$=(a_1-a_3)^2+\sigma^2$$

$$E(S_3)=E\left[\frac{(\mathrm{I}_3-\mathrm{II}_3)^2}{16}\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[E(4a_1+4a_3-8a_2)^2+16\sigma^2\right]$$

$$=(a_1+a_3-2a_2)^2+\sigma^2$$

$$E(S_A)=E(S_2+S_3)=E(S_2)+E(S_3)$$

$$=(a_1-a_3)^2+(a_1+a_3-2a_2)^2+2\sigma^2$$

当 $a_1=a_2=a_3=0$ 时，S_A/f_A 为 σ^2 的无偏估计，$f_A=2$。同样对交互作用的偏差平方和也可以得到类似结论，这里从略。

四、部分追加法

例5.6 某化工产品试制中，催化剂粒度取二水平，催化剂对反应物资的相对速度B取二水平， 温度取三水平。试验指标：提高产量（公斤/小时）。

这是考虑两个二水平因素，一个三水平因素的试验问题。我们采用表$L_4(2^3)$的基础上追加两次试验组成试验计划。由于部分追加法的基本原理和偏差平方和的计算公式已在第四章讲过。这里仅将其试验计划和试验结果列表如下：（见表5—5）

表5—5

试验号 \ 因素			A 1	B 2	C 3	试验结果	第一次 y_{i1}	第二次 y_{i2}	合计 y_i	计算需用数据
实际试验总次数 M＝6	基本试验次数 N＝4	1	1	1	1	y_1	1004	1065	2069	4138
		2	1	2	2	y_2	480	483	963	963
		3	2	1	2	y_3	734	728	1462	1462
		4	2	2	1	y_4	849	892	1741	3482
	追加试验次数 n＝2	5	1	2	3	$y'_2=y_5$	434	410	844	844
		6	2	1	3	$y'_3=y_6$	889	879	1768	1768

	A	B	C
I_j	5945	7638	7620
II_j	6712	5289	2425
III_j			2612
$\mathrm{I}_j-\mathrm{II}_j,\ j=1,2$	—767	2079	—
$(\mathrm{I}_j-\mathrm{II}_j)^2,\ j=1,2$	588289	4322241	—
S_j	36768	270140	421364

$$\bar{y}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{6} n_i y_i=791$$

其中$n_1=n_4=2$

$n_2=n_3=n_5=n_6=1$

$$T=\sum_{i=1}^{6} n_i y_i=12657$$

$$CT=\frac{T^2}{16}=10012478$$

$$S_{总1}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} n_i y_i^2-CT=10763329-CT=750850 \quad f_{总1}=5$$

$$S_{e1}=S_{总1}-S_A-S_B-S_C=22578, \qquad f_{e1}=1,$$

$$S_{总}=\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{2} n_j y_i^2 K-CT=10769259-CT=756781, f_{总}=11,$$

$$S_{e2}=S_{总}-S_{总1}=5931 \qquad f_{e2}=6。$$

$F_{0.05}(2,7)=4.74$, $F_{0.01}(2,7)=9.55$,

$F_{0.001}(2,7)=21.7$

$F_{0.05}(1,7)=5.59$, $F_{0.01}(1,7)=12.2$,

$F_{0.001}(1,7)=29.2$

分析结果：B、C特别显著，最优工艺方案为：$A_2B_1C_1$。

用此表进行方差分析之前，尚须说明一点：用统计方法可以证明，按照上述新定义的偏差平方和所算得的S_A，S_B，S_C中包含的误差比例不一致，相差一定的倍数。为了在进行方差分析时做到合理起见，需要事先进行修正。即在S_A，S_B，S_C上分别乘以各自的修正系数K_A，K_B，K_C，修正系数按下列公式计算。

因素的修正系数$K_{因}$为

$$\frac{1}{K_{因}}=\frac{1}{f_{因}}\left[\frac{3N-M}{N}(P_{因}-1)+q_{因}\right]$$

第一类误差的修正系数为

$$\frac{1}{K_{e1}}=\frac{1}{f_{e1}}\left[2N-\frac{3N-M}{N}-\Sigma_{因}\frac{f_{因}}{K_{因}}\right]$$

其中N表示基础试验次数；M表示实际试验次数；$f_{因}$和f_{e1}分别表示因素和第一类误差的自由度，$P_{因}$表示因素和第一类误差的自由度，$P_{因}$表示基础试验中因素的水平数，$\varepsilon_{因}$表

表5—6

方 差 分 析 表

方差来源	偏差平方和	自由度	修正数	修正后的均方和	F比	显著性
A	$S_A=S_1=36768$	1	$K_A=\frac{2}{3}$	$V_A=\frac{2}{3}S_A=24512$	$\frac{V_A}{V_e}=7.74$	*
B	$S_B=S_2=270140$	1	$K_B=\frac{2}{3}$	$V_B=\frac{2}{3}S_B=180093$	$\frac{V_B}{V_e}=56.87$	* * *
C	$S_c=S_3=421364$	2	$K_c=\frac{4}{5}$	$V_c=\frac{4}{5}\cdot\frac{S_c}{2}=\frac{2}{5}S_c=168545$	$\frac{V_C}{V_e}=53.22$	* * *
e_1	$S_{e1}=22578$	1	$K_{e1}=1$	$V_{e1}=S_{e1}=22578$		
e_2	$S_{e2}=5931$	6	$K_{e2}=\frac{3}{4}$	$V_{e2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{S_{e2}}{6}=\frac{1}{8}S_{e2}=741$		
e	$S_e=S_{e1}+S_{e2}=28509$	7	$K_e=\frac{7}{9}$	$V_e=\frac{7}{9}\cdot\frac{S_e}{7}=3167$		

示因素追加的水平数。在我们的举例中，$N=4$；$M=6$；$f_A=f_B=1$，$f_e=2$；

$P_A=P_B=P_C=2$；$q_A=q_B=0$；$q_C=1$；$f_{e1}=1$。由此，按$K_因$的计算公式可以求出，$K_A=\frac{1}{2}$，$K_B=\frac{2}{3}$，$K_C=\frac{4}{5}$。

同样，对偏差平方和S_{e1}，S_{e2}，S_e也要分别乘上$K_{e1}=1$，$K_{e2}=\frac{3}{4}$，$K_e=\frac{7}{9}$。

我们在表$L_4(2^3)$的基础上追加两次试验组成的试验计划，每号试验重复两次，即$m=2$，试验计划如表5—7所示。

由上述试验计划和表头设计得数据结构式：

表5—7

试验号 \ 列号			A 1	B 2	C 3	试验结果		合计	计算需用数据
实际试验总次数 M=6	基本试验 N=4	1	1	1	1	y_{11}	y_{12}	y_1	$2y_1$
		2	1	2	2	y_{21}	y_{22}	y_2	y_2
		3	2	1	2	y_{31}	y_{32}	y_3	y_3
		4	2	2	1	y_{41}	y_{42}	y_4	$2y_4$
	追加试验 n=2	5	1	2	3	y'_{21}	y'_{22}	$y'_2=y_5$	y_5
		6	2	1	3	y'_{31}	y'_{32}	$y'_3=y_6$	y_6

$$y_{1i}=\mu+a_1+b_1+c_1+\varepsilon_{1i},$$
$$y_{2i}=\mu+a_1+b_2+c_2+\varepsilon_{2i},$$
$$y_{3i}=\mu+a_2+b_1+c_2+\varepsilon_{3i},$$
$$y_{4i}=\mu+a_2+b_2+c_1+\varepsilon_{4i}, \qquad (i=1,\ 2)$$
$$y'_{2i}=\mu+a_1+b_2+c_3+\varepsilon_{5i},$$

$y'_{8i}=\mu+a_2+b_1+c_3+\varepsilon_{6i}$

其中ε_{ki}（K＝1，2，3，4，5，6；i＝1，2）是相互独立且服从同一分布N（0，6）的随机变量，由数据结构式可得计算du用数据的结构式为：

$$2y_1=4\mu+4a_1+4b_1+4c_1+2\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_{1i},$$

$$y_2=2\mu+2a_1+2b_2+2c_2+\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_{2i},$$

$$y_3=2\mu+2a_2+2b_1+2c_2+\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_{3i},$$

$$2y_4=4\mu+4a_2+4b_2+4c_1+2\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_{4i},$$

$$y_5=2\mu+2a_1+2b_2+2c_3+\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_{5i},$$

$$y_6=2\mu+2a_2+2b_1+2c_3+\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_{6i}。$$

其中各效应参数间满足关系式：

$a_1+b_2=b_1+b_2=2c_1+c_2+c_3=0$。

求各因素偏差平方和的计算公式见第四章，不再重述。这里着重讨论一下通过求因素偏差平方和的平均值来分析为什么各因素偏差平方和都要乘以相应的修正系数。以详细计算因素A的偏差平方和的平均值为例，有

$$S_A=\frac{(\mathrm{I}_1-\mathrm{II}_1)^2}{8m}\qquad\qquad f_A=1,$$

$$E(S_A)=\frac{1}{8m}E\,(2y_1+y_2+y_5-y_3-2y_4-y_6)^2$$

$$=\frac{1}{8\times 2}E\left[8(a_1-a_2)+\sum_{i=1}^{2}(2\varepsilon_{1i}+\varepsilon_{2i}\right.$$

$$\left.+\varepsilon_{5i}-\varepsilon_{3i}-2\varepsilon_{4i}-\varepsilon_{6i})\right]^2$$

$$=\frac{64}{16}(a_1-a_2)^2+\frac{64}{16}\sigma^2$$

$$=4(a_1-a_2)^2+\frac{3}{2}\sigma^2$$

当$a_1=a_2$时，$E(S_A/f_A)=E(S_A/1)=\frac{3}{2}\sigma^2$。可见$S_A/f_A$可以用来估计$\sigma^2$，但它不是$\sigma^2$的无偏估计。为了使估计是无偏的，有必要乘以相应的修正系数K_A，使得$a_1=a_2=0$时，

$$E\left(K_A\frac{S_A}{f_A}\right)=\sigma^2$$

由于$E\left(K_A\frac{S_A}{f_A}\right)=K_AE\left(\frac{S_A}{f_A}\right)=\frac{K_A}{f_A}E(S_A)=\frac{K_A}{1}\cdot\frac{3}{2}\sigma^2$，故取$K_A=\frac{2}{3}$，则可得$\sigma^2$的无偏估计。与此类似可得

$$E(S_B)=4(b_1-b_2)^2+\frac{3}{2}\sigma^2,\qquad f_B=1$$

$$E(S_C)=(7C^2+4C_2^2-4C_3^2)+\frac{5}{2}\sigma^2,\quad f_C=2$$

为了在$b_1=b_2=0$，$c_1=c_2=c_3=0$时，S_B/f_B和S_C/f_C分别都是σ^2的无偏估计，相应的修正系数应取为

$$K_3=\frac{2}{3}, \qquad K_C=\frac{4}{5}。$$

以下分别计算误差的修正系数。根据第四章有关内容，我们知道，虽然 $L_4(2^3)$ 表头设计排满了因素，但仍可获得第一类误差，即

$$S_{e1}=S_{总}-(S_A+S_B+S_C)$$

$$f_{e1}=f_{总1}-(f_A+f_B+f_C)=5-(1+1+2)=1。$$

由于 $E(S_{e1})=E(S_{总})-E(S_A+S_B+S_C)$

$$=E\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}n_i y_i^2-CT\right]-E\left[S_A+S_B+S_C\right]$$

$$=\left[4(a_1-a_2)^2+4(b_1-b_2)^2+(7C_1^2+4c_2^2+4c_3^2)+\frac{13}{2}\sigma^2\right]-E(S_A)-E(S_B)-E(S_C)=\sigma^2$$

可见，要使 $E\left(K_{e1}\cdot\frac{S_{e1}}{f_{e1}}\right)=\sigma^2$，可取 $K_{e1}=1$。

关于第二类误差，我们有

$$S_{e2}=S_{总}-S_{总1}, \qquad f_{e2}=6(m-1)=6。$$

$$E(S_{e2})=E(S_{总})-E(S_{总1})$$

$$=\left[4(a_1-a_2)^2+4(b_1-b_2)^2+(7c_1^2+4c_2^2+4c_3^2)+\frac{29}{2}\sigma^2\right]-\left[4(a_1-a_2)^2+4(b_1-b_2)^2+(7c_1^2+4c_2^2+4c_3^2)+\frac{13}{2}\sigma^2\right]=8\sigma^2$$

可见，$S_{e2}/f_{e2}=8\sigma^2/6=\frac{4}{3}\sigma^2$，它不是 σ^2 的无偏估计。为了使得估计值是无偏的，需要乘以修正系数 K_{e2}，使得

$$E\left(K_{e2}\cdot\frac{S_{e2}}{f_{e2}}\right)=\sigma^2,$$

由于$E\left(K_{e2}\cdot\frac{S_{e2}}{f_{e2}}\right)=K_{e2}\cdot\frac{4}{3}\sigma^2$,

故 $\quad K_{e2}=\frac{3}{4}$。

本例是重复试验，可将两类误差合并，即

$S_e=S_{e1}+S_{e2}$, $\qquad f_e=f_{e1}+f_{e2}=1+6=7$。

此时$E\ (S_e/f_e)\ =E\ ((S_{e1}+S_{e2})/f_e)$

$$=E\ (S_{e1}/f_e)\ +E\ (S_{e2}/f_e)$$

$$=\frac{1}{f_e}E(S_{e1})+\frac{1}{f_e}E(S_{e2})=\frac{1}{7}\sigma^2+\frac{1}{7}\cdot 8\sigma^2$$

$$=\frac{9}{7}\sigma^2。$$

可见S_e/f_e也不是σ^2的无偏估计，需要乘以相应的修正系数K_e，使得

$$E\left[K_e\cdot\frac{S_e}{f_e}\right]=\sigma^2$$

由于$E\left[K_e\cdot\frac{S_e}{f_e}\right]=K_eE\ (S_e/f_e)\ =K_e\cdot\frac{7}{9}\sigma^2$,

$$K_e=\frac{7}{9}。$$

在一般情况下，修正系数不需要每次这样推算，有现成公式可以直接计算（参见第四章有关部份），本节前面已有引证。现在把它们的推导补充如下：

设原正交表需做N次试验，其中某一列上可放一个同水平的因素。显然这个因素的每个水平重复了N/P次。现在要

对这个水平的因素再追加q个水平。这样，该因素共有 $P+q$ 个水平。追加试验次数为 $q\cdot\frac{N}{P}$，总的试验次数为：

$$M=N+q\cdot\frac{N}{P}=\left(1+\frac{q}{P}\right)N。$$

设这个M次试验的结果分别为 y_1，y_2，$\cdots$，y_N，$\cdots$，y_M。从统计的角度看，必须把这M个数据当作 $2N$ 个数据使用。其中 $N-(M-N)=2N-M$ 个数据的每一个当作两个数据使用，不妨设这 $2(2N-M)$ 个数据为 $2y_1$，$2y_2$，$\cdots$，$2y_{2N-M}$；另外 $M-N$ 个数据记为 y_{2N-M+1}，$\cdots$，y_M，这 $2N$ 个数据的CT表为：

$$CT=\frac{1}{2N}[2(y_1+y_2+\cdots+y_{2N-M})+(y_{2N-M+1}+\cdots+y_M)]^2。$$

从数据结构式以及各因素效应间的关系，可以知道 E（CT）中只含有一般平均 μ 和误差部分，具体如下式：

$$E(CT)=\frac{1}{2N}(2N\mu)^2+\frac{1}{2N}[4(2N-M)+M-(2N-M)]\sigma^2$$

$$=2N\mu^2+\frac{3N-M}{N}\sigma^2$$

下面将分几种情况寻求部分追加法中各类偏差平方和的修正系数的计算公式：

（1）对追加了q个水平的因素。它共有 $P+q$ 个水平。设对应的这 $P+q$ 个水平的数据之和分别为

$$\underbrace{\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \cdots,\ \overline{p-q}}\ ,\ \underbrace{\overline{p-q+1},\ \cdots,\ \overline{p+q}},$$

这 $p+q$ 个数据之和可分为两类，不妨设前 $p-q$ 个数据之和中的每一个和含有 $2N/p$ 个数据。因为该因素有 $p-q$ 个水

平对应的数据皆为 $2y_i$；另外，后 $2q$ 个数据之和中的每一个和含有 N/p 个数据，因为该因素有 $2q$ 个水平对应的数据皆为 y_i。于是该因素的偏差平方和 $S_{因}$ 为：

$$S_{因}=\frac{\mathrm{I}^2+\mathrm{II}^2+\cdots+\overline{p-q}^2}{2N/P}+\frac{\overline{p-q+1}^2+\cdots+\overline{p+q}^2}{N/P}-CT$$

在各水平的效应无差异的假设下，$S_{因}$ 的平均值为

$$E(S_{因})=\frac{(p-q)(2\frac{N}{P}\mu)^2}{2N/P}+\frac{2q(\frac{N}{P})^2\mu^2}{N/P}$$

$$+\frac{(p-q)\cdot 4\cdot\frac{N}{P}\sigma^2}{2N/P}+\frac{2q\cdot\frac{N}{P}\sigma^2}{N/P}-E(CT)$$

$$=2p\sigma^2+2N\mu^2-E\ (CT)$$

$$=\left[2p-\frac{3N-M}{N}\right]\sigma^2$$

或者

$$E(S_{因})=\left[\frac{3N-M}{N}(P-1)-\frac{3N-M}{N}P+2p\right]\sigma^2$$

$$=\left[\frac{3N-M}{N}(P-1)+(M\frac{P}{N}-P)\right]\sigma^2$$

$$=\left[\frac{3N-M}{N}(P-1)+q\right]\sigma^2$$

最后一个等式成立是因为：

$$N\frac{P}{N}-P=\frac{M}{N/P}-P=(p+q)-p=q。$$

为了进行方差分析，要使该因素的偏差平方和 $S_{因}$ 的平

均值为$f_{因}\sigma^2$（$f_{因}$为该因素的自由度），即要对$S_{因}$乘上一个修正系数$K_{因}$，使得

$$E(K_{因}S_{因})=f_{因}\sigma^2。$$

由此可得

$$\frac{1}{K_{因}}=\frac{1}{f_{因}}\left[\frac{3N-M}{N}(P-1)+q\right]$$

（2）对其它不追加水平的因素。它有p个水平，每个水平对应的数据之和记为Ⅰ，Ⅱ，…，$\overline{p}$，其中每一个和都含有$\frac{N}{P}-\frac{M-N}{P}=\frac{2N-M}{P}$个数据为$2y_i$，$2\frac{M-N}{P}$个数据为$y_i$，

因此，这类因素的偏差平方和为

$$S_{因}=\frac{Ⅰ^2+Ⅱ^2+\cdots+\overline{p}^2}{2N/P}-CT$$

在水平效应无差异的假设下，

$$E(S_{因})=\frac{P\left[4\cdot\frac{2N-M}{P}+2\cdot\frac{M-N}{P}\right]\sigma^2}{2N/P}-\frac{3N-M}{N}\sigma^2$$

$$=\frac{3N-M}{N}(P-1)\sigma^2。$$

为了进行方差分析，这类因素的偏差平方和要乘上修正系数$K_{因}$，以同样的方法，求得$K_{因}$为

$$\frac{1}{K_{因}}=\frac{1}{f_{因}}\left[\frac{3N-M}{N}(P-1)\right]。$$

结合（1）和（2），无论因素是追加了q个水平，还是没追加水平（q＝0），它们的偏差平方和的修正系数皆为

$$\frac{1}{K_{因}}=\frac{1}{f_{因}}\left[\frac{3N-M}{N}(P-1)+q\right]。$$

（3）第一类误差S_{e1}的修正系数K_{e1}。因为：

$S_{e1}=S_{总1}-\Sigma_{因}S_{因}$,

$E(S_{e1})=E(S_{总1})-\Sigma_{因}E(S_{因})$,

其中，$E(S_{因})=\frac{f_{因}}{K_{因}}\sigma^2$

$$E(S_{总1})=E\left[2y_1^2+\cdots+2y_{2N-M}^2+y_{2N-M+1}^2+\cdots y_M^2-CT\right]$$

$$=[2(2N-M)+M-(2N-M)]\sigma^2-\frac{3N-M}{N}\sigma^2$$

$$=\left(2N-\frac{3N-M}{N}\right)\sigma^2$$

代入原式，即得：

$$E(S_{e1})=\left[2N-\frac{3N-M}{N}-\Sigma_{因}\frac{f_{因}}{K_{因}}\right]\sigma^2。$$

由此可以看出，S_{e1}的修正系数K_{e1}为

$$\frac{1}{K_{e1}}=\frac{1}{f_{e1}}\left[2N-\frac{3N-M}{N}-\Sigma_{因}\frac{f_{因}}{K_{因}}\right]。$$

第六章　应用实例

第一节　树脂砂强度的试验设计法

——正交设计法在铸造生产中的应用

沈阳第三机床厂

一、树脂砂造型工艺的特点

沈阳第三机床厂是以生产多轴自动车床、六角车床系列为主的重点机床厂之一。其产品的精度高，自动化水平高，技术复杂，全部铸件自本厂铸工车间提供。铸件占机床总重量的80%左右。由于机床结构复杂，对铸件的形状，材质都提出较高的要求。因此，铸件质量的好坏，直接影响到产品质量水平及企业经济效益的高低。

为了开拓国际市场，提高产品的竞争能力。该厂在1983年与美国普尔特·惠特尼公司合作生产PW1200CNC数控车床，这是具有八十年代较高水平的产品。为了保证合作产品质量，提高铸件质量，尤其是铸件外观尺寸精度，便成了铸造车间的关键课题。铸造工程技术人员和工人们大胆地改造了传统的砂型工艺，采用了先进的“树脂砂”造型工艺，成功地生产了五台 PW 1200 CNC 车床铸件，取得了理想的效果，受到外商的好评。

“树脂砂”是靠有机合成树脂与砂粘合，自硬成型生产铸件。改变了过去的粘土与砂子粘合靠外力(造型机、人工)

捣实成型的传统砂型工艺。“树脂砂”是1944年问世的。但只是近几年才得到较快的发展。目前，在西德、美国、日本等国，对于大件、中小批量的铸件，极力推广这种先进工艺方法。

树脂砂的特点是：

1、流动性好，易成型，可以生产形状复杂的铸件；

2、简化了芯骨，型芯不吸湿，可以长久保存；

3、自行硬化，不用烘干，节省能源；

4、热强度高，变形收缩量小，使铸件表面光洁度好，尺寸精度高；

5、降低废品率，溃散性好，易清理，可以减轻工人的劳动强度。

以上优点是现行使用的传统粘土砂型工艺所不具备的。

但是，由于树脂砂价格高，铸件成本高。为了降低树脂砂成本，通过对现行工艺方案的分析，找出其降低成本的基本途径是减少树脂与固化剂的加入量。因此，我们应用试验设计法的目的，就是要找出树脂砂在满足工艺要求的前提下，降低成本的最佳配比方案。

二、试验计划的安排及试验

1、试验目的及考核指标

本试验目的：在满足树脂砂抗拉强度的前提下，降低铸件成本。

试验考核指标：为24小时的树脂砂抗拉强度公斤/厘米^2，工艺要求：抗拉强度>8公斤/厘米^2。

目前，铸造车间采用树脂砂制芯的配比方案是：原砂为大林砂，F701呋喃树脂占原砂重量的2％，对甲苯硫酸水

溶液固化剂占树脂加入量的75%。

2、挑因素，选水平（位级），制定因素水平表。

根据专业知识和实践经验，结合工艺的基本要求，找出影响考核指标的因素水平表。如表6—1所示

表6—1 **因素水平表**

因素 水平	原砂含泥量% A	树脂加入量% B	固化剂加入量% C	可使用时间(分) D
1	0.4	1.2	45	0
2	1.0	1.6	50	2
3	1.6	2.0	55	4

3、选用正交表

根据四因素三水平的试验，并且考虑交互作用，可选用$L_{27}(3^{13})$正交表。利用交互作用列表选择交互作用列，如附表6—1。

试验计划安排如表6—2。

4、树脂砂混制工艺，试验设备及试验条件。

树脂砂混制工艺：

双砂三混：原砂＋固化剂＋树脂→出砂。固化剂1.5分钟，树脂1.0分钟，混砂时间共2.5分钟。

表6－2

试 验 计 划 安 排

原砂温度25±2℃

列号 试验号	A	B	$A^1\times B$	$A^2\times B$	C	$A^1\times C$	$A^2\times C$	$B^1\times C$		D	$B^2\times C$			试验顺序安排
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	第3次
1	1(0.4%)	1(1.2%)	1	1	1(45%)	1	1	1	1	1(0′)	1	1	1	
2	1	1	1	1	2(50%)	2	2	2	2	2(2′)	2	2	2	8
3	1	1	1	1	3(55%)	3	3	3	3	3(4′)	3	3	3	12
4	1	2(1.6%)	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	7
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1	5
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2	1
7	1	3(2%)	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2	13
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3	14
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	9
10	2(1%)	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	18
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1	20
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2	15
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2	24
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3	16
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1	11
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1	25
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2	19
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	27
19	3(1.6%)	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	23
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3	4
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1	17
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1	22
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	26
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3	6
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3	2
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1	21
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2	20

注：试验顺序安排是随机的。

试验设备：a、碾轮式混砂机，

型号　XS—BC

b、杠杆式强度试验机，

型号　XS—QC

24小时抗拉强度“8”字芯盒，试样腰尺寸25×25。

试验条件：

（1）大林砂：55/100目圆粒砂，重2000克。

（2）树脂：呋喃型铸铁树脂。

（3）固化剂：对甲苯硫酸(75%的甲苯硫酸水溶液)。

（4）室内温度：25±2℃，相对湿度70—90%。

本次试验是重复取样试验，从表6—3试验结果可以看出：

（1）在同一试验条件下，每次试验的数据並不相同。这种不同只能是试验误差（试验过程中各种偶然因素造成的误差）所引起的。

（2）不同试验条件下重复试验数据的平均值之间也是有差异的。显然，这种差异主要反映了试验条件的改变对试验数据的影响。

（3）27次试验数据是参差不齐的。这是由于试验条件的改变与试验误差的存在所造成的数据波动。

三、试验结果分析

根据表6—3，表6—4计算：

1、修正项CT

$$T=\sum_{i=1}^{n} yi=(50.4+48.76+\cdots+65.0+62.2)=1612.78$$

$$CT = \frac{T^2}{\text{试验总次数}} = \frac{1612.78^2}{27 \times 6} = 16055.92$$

2、各列的平方和：

$$S_{列} = \frac{\text{该列各水平（对应数据和）}^2\text{之和}}{\text{重复数}} - CT$$

（1）总偏差平方和

$S_{总}$ = 各次试验指标数据的平方和 $-CT$

$= (18.0^2 + 6.8^2 + \cdots, \ +14^2 + 9.4^2) - 16055.92$

$= 22\,9.15$

（2）试验间的偏差平方和

$$S_{总_1} = \frac{1}{r_c} \sum_{i=1}^{n} yi^2 - CT, \qquad r_o\text{：重复取样数，} r_o = 6$$

$= \frac{1}{6}(50.4^2 + 48.76^2 + \cdots, \ +65^2 + 62.2^2) - 16055.92$

$= 1826.49$

（3）试验间的偏差平方和$S_{总_1}$，可以分解为A的一次效应$S_{A\epsilon}$，A的二次效应S_{Ag}，B的一次效应S_{Be}，B的二次效应S_{Bg}和主效应$S_{A\times B}$，S_C，$S_{A\times C}$，S_D以及一次误差平方和S_{e1}（试验误差平方和），根据：

$$S_{Ai} = \frac{(W_1A_1 + W_2A_2 + \cdots, + W_aA_a)^2}{r_o \cdot r_i \cdot (\lambda^2 S)}$$

式中：$\lambda^2 S$是系数W的平方和

r_o：重复取样数

r_i：i的重复取样数

查附表2

一次项b_1： $\begin{cases} W_1 = -1 \\ W_2 = 0 \\ W_3 = 1 \\ \lambda^2 S = 2 \end{cases}$　　二次项b_2： $\begin{cases} W_1 = 1 \\ W_2 = -2 \\ W_3 = 1 \\ \lambda^2 S = 6 \end{cases}$

$$S_{Ae} = \frac{[(-1)\,\mathrm{I}_A + 0\,\mathrm{II}_A + 1 \times \mathrm{III}_A]^2}{r_0 r_A (\lambda^2 S)}$$（r_A：A的重复取样数）

$$= \frac{[(-1) \times 663.67 + 449.35]^2}{6 \times 9 \times 2}$$

$$= 425.31$$

$$S_{Aq} = \frac{[1 \times \mathrm{I}_A + (-2)\,\mathrm{II}_A + 1 \times \mathrm{III}_A]^2}{r_0 \times r_A \times (\lambda^2 S)}$$

$$= \frac{[663.67 + (-2) \times 499.76 + 449.35]^2}{6 \times 9 \times 2}$$

$$= 39.76$$

主效应　$S_A = S_{Ae} + S_{Aq} = 425.31 + 39.76$

$$= 465.07$$

$$S_{Be} = \frac{[(-1) \times 375.27 + 683.18]^2}{6 \times 9 \times 2}$$

$$= 877.86$$

$$S_{Bq} = \frac{[1 \times 375.27 + (-2) \times 554.33 + 1 \times 683.18]^2}{6 \times 9 \times 6}$$

$$= 7.78$$

主效应$S_B = S_{Be} + S_{Bq} = 877.86 + 7.78 = 885.64$

$$S_{A \times B} = S_3 + S_4$$

$$= \frac{(\mathrm{I}^2 + \mathrm{II}^2 + \mathrm{III}^2)_3 + (\mathrm{I}^2 + \mathrm{II}^2 + \mathrm{III}^2)_4}{9 \times 6} - 2CT$$

$$=\frac{868830.94+867338.51}{54}-2\times16055.92$$

$$=39.45$$

$$S_C=\frac{(\mathrm{I}^2+\mathrm{II}^2+\mathrm{III}^2)}{54}-CT$$

$$=\frac{867769.70}{54}-16055.92=13.89$$

$$S_{A\times C}=S_6+S_7=\frac{872237.75+869857.33}{54}-2\times16055.92$$

$$=149.18$$

$$S_{B\times C}=S_8+S_9=\frac{868339.42+870259.85}{54}-2\times16055.92$$

$$=84.44$$

$$S_D=\frac{867681.36}{54}-16055.92=12.25$$

（4）试验误差平方和（一次误差平方和）

$$S_{e1}=S_{总1}-S_A-S_B-S_{A\times B}-S_C-S_{A\times C}-S_{B\times C}-S_D$$
$$=1826.49-[465.07+885.64+39.45+13.89$$
$$+149.18+84.44+12.25]=176.57$$

（5）重复取样间的误差平方和（二次误差平方和）

$$S_{e2}=S_{总}-S_{总1}=2219.15-1826.64=392.66$$

3、计算各列的自由度

根据　$f_{列}$ = 该列的水平数 − 1

$f_{交i\times j}=f_{列i}\times f_{列j}$

$f_{总}$ = 总的试验次数 − 1

$f_A=f_B=f_C=f_D=f_9=f_{11}=f_{13}=3-1=2$

$f_{A\times B}=f_{A\times C}=f_{B\times C}=2\times2=4$

$f_{e1}=f_9+f_{11}+f_{13}=2+2+2=6$

$f_{总} = 162 - 1 = 161$

$f_{e2} = f_{总} - f_{总1}$

$= 161 - (4 \times 2 + 3 \times 4 + 6) = 135$

其中，

$f_{总1} = f_A + f_B + f_C + f_{A\times B} + f_{A\times C} + f_{B\times C} + f_9 + f_{11} + f_{18}$

4、计算平均方差

根据 $V_i = S_i / f_i$

$$V_A = \frac{S_A}{f_A} = \frac{465.07}{2} = 232.54$$

$$V_{Ae} = \frac{S_{Ae}}{f_{Ae}} = \frac{425.31}{1} = 425.31$$

$$V_{Ag} = \frac{S_{Ag}}{f_{Ag}} = \frac{39.76}{1} = 39.76$$

$$V_B = \frac{S_B}{f_B} = \frac{885.64}{2} = 442.82$$

$V_{Be} = 877.86 / 1 = 877.86$

$V_{Bg} = 7.78 / 1 = 7.78$

$V_{A\times B} = 39.45 / 4 = 9.86$

$V_C = 13.89 / 2 = 6.945$

$V_{A\times C} = 149.18 / 4 = 37.30$

$V_{B\times C} = 84.44 / 4 = 21.11$

$V_D = 12.25 / 2 = 6.13$

$V_{e1} = 176.57 / 6 = 29.43$

$V_{e2} = 392.87 / 135 = 2.91$

$$V_e = \frac{S_e}{f_e} = \frac{S_{Ag} + S_{Bg} + S_{A\times C} + S_{A\times B} + S_{B\times C} + S_{e1} + S_C + S_D}{1 + 1 + 4 + 4 + 4 + 6 + 2 + 2}$$

$$= \frac{39.76 + 7.78 + 39.43 + 149.18 + 84.44 + 176.57 + 13.89 + 12.25}{24}$$

$=21.0$

5、计算F值

F检验是从各个因素波动的平均方差与偶然（误差）波动的平均方差的比较中可以看出因素是否对试验数据产生显著的影响。

$$F_{Ae}=\frac{V_{Ae}}{V_e}=\frac{425.31}{21.8}=19.51>F_{0.01}(1,24)$$

$$=7.82\quad * \quad *$$

$$F_{Be}=\frac{V_{Be}}{V_e}=\frac{877.86}{21.8}=40.27>F_{0.01}(1,24)$$

$$=7.82\quad * \quad *$$

6、计算纯效应（纯偏差平方和）

由于S_i包含$(i-1)$试验误差，从S_i中减去$(i-1)$个试验误差即误差方差V_e，便得出i的水平波动，叫做i的纯效应，记作S_i'。

依据 $S_i'=S_i-$i的自由度$\times V_e$

$S_{Ae}'=S_{Ae}-1\times V_e=425.31-1\times 21.8=403.51$

$S_{Be}'=S_{Be}-1\times V_e=877.86-1\times 21.8=856.06$

$S_e'=523.31+2\times 21.8=566.71$

$S_{e1}'=392.86$

$S_{总}'=S_{Ae}'+S_{Be}'+S_e'+S_{e2}'$

$=403.51+856.06+566.71+392.87=2219.15$

7、计算贡献率

在方差分析中，由于有试验误差，各个因素的真正影响究竟有多大，还未得知。所以，计算各个因素的真正的影响率就是贡献率。

根据：

$$\rho = \frac{S'_i}{S_{总}} \times 100\%$$

$$\rho_{Ae} = \frac{S_{Ae}'}{S_{总}} \times 100\% = \frac{403.51}{2219.15} \times 100\% \approx 18.2\%$$

$$\rho_{Be} = \frac{S'_{Be}}{S_{总}} \times 100\% = \frac{856.06}{2219.15} \times 100\% = 38.6\%$$

$$\rho_{e} = \frac{S'_{e}}{S_{总}} \times 100\% = \frac{566.71}{2219.15} \times 100\% = 25.5\%$$

$$\rho_{e2} = \frac{S_{e2}'}{S_{总}} \times 100\% = \frac{392.87}{2219.15} \times 100\% = 17.7\%$$

$$\rho_{总} = \rho_{Ae} + \rho_{Be} + \rho_{e} + \rho_{e2}$$

$$= 18.2\% + 38.6\% + 25.5\% + 17.7\% = 100\%$$

8、方差分析表

表6—5

方差名称 / 来源	f	S	V	F_0	显著性	S′	ρ%
A	2	465.07	232.54				
A{e	1	425.31	425.31	19.51	**	403.35	18.2
A{g	1	39.76	39.76				
B	2	885.64	442.82				
B{e	1	877.86	877.86	40.27	**	856.06	38.6
B{g	1	7.78	7.78				
A×B	4	39.45	9.86				
C	2	13.89	6.95				
A×C	4	149.18	37.30				
B×C	4	84.44	21.11				
D	2	12.25	6.13				
e_1	6	176.56	29.43				
e_2	135	392.87	2.91			392.87	17.7
(e)	24	523.31	21.80			566.71	25.5
总计	161	2219.15				2219.15	100.0

注：当方差分析中有一次误差（试验之间的误差）e_1和二次误差（重复取样之间的误差）e_2时。先以二次误差来检验一次误差。若e_1为显著时，要把$S_{A\varepsilon}$，$S_{B\varepsilon}$，$S_{A\times C}$，S_C，$S_{B\times C}$，S_D，e_1合并在一起，求一次误差平方和S_{e1}，用它对A、B进行检验。

当用二次误差来检验，一次误差并不是显著时。这时，可以认为不存在试验间的误差，而把e_1和e_2合并在一起来检验所有项目。

结合方差分析表说明一下上述的注释：

$$F_e = \frac{V_{e1}}{V_{e2}} = \frac{29.43}{2.91} = 10.11$$

当在F表中找不到所要的自由度的数值时，一种做法是，只要方差比值大于这样一个F_α（n_1，n_2）。其中n_2小于所要求的分母自由度。而分母的自由度越大，F值就越小。

∵　$F_{0.01}(6, 125) = 2.95$

又∵　$f_{e2} = 135 > n_2 = 125$

即　$F_{0.001}(6, 135) < F_{0.01}(6, 125)$

∴　高度显著

另一种做法是用插值法求出所要求自由度的F值。当自由度小于30时用直接的线性内插。当自由度大于30时，用自由度倒数的线性内插。

如求$F_{0.01}(6, 135)$的值，设$F_{0.01}(6, 135) = x$

$F_{0.01}(6, 125) = 2.95$，$F_{0.01}(6, 150) = 2.92$

$1/125 - 1/150 = 0.0013$，$1/135 - 1/150 = 0.0007$

$$x = 2.92 + \frac{0.0007}{0.0013}(2.95 - 2.92) = 2.94$$

$\because$ $Fe = 10.11 > F_{0.01}(6,135) = 2.94$

$\therefore$ 高变显著。

故：$S_e = S_{Ae} + S_{Be} + S_{A\times B} + S_C + S_{A\times C} + S_{B\times C} + S_D + S_{e1}$

$= 523.31$

$f_e = 24$

$$V_e = \frac{S_e}{f_e} = \frac{523.31}{24} = 21.8$$

9、显著因素置信区间及效应图

（1）置信区间

$$\varepsilon = \pm\sqrt{F_{0.05}(1,24)\frac{V_e}{n_e}}$$

其中：n_e：各水平的重复次数

V_e：方差表中对A、B作检验的误差方差

$\because$ $n_e = 6\times 9 = 54$，$V_e = 21.8$

查表可知，$F_{0.05}(1,\ 24) = 4.26$

$$\therefore\quad \varepsilon = \pm\sqrt{4.26\times\frac{21.8}{54}} = \pm 1.31$$

① A的估计

$$\hat{A}_1 = \overline{A}_1 \pm \varepsilon = \frac{\mathrm{I}}{54} \pm 1.31 = \frac{663.67}{54} \pm 1.31$$

$$= 12.29 \pm 1.31 = (10.98\sim 13.60)$$

$$\hat{A}_2 = \overline{A}_2 \pm \varepsilon = \frac{\mathrm{II}}{54} \pm 1.31 = \frac{499.76}{54} \pm 1.31$$

$$= 9.25 \pm 1.31 = (7.94\sim 10.56)$$

$$\hat{A}_3 = \overline{A}_3 \pm \varepsilon = \frac{\mathrm{III}}{54} \pm 1.31 = \frac{449.35}{54} \pm 1.31$$

$$= 8.32 \pm 1.31 = (6.92 \sim 9.54)$$

② B的估计

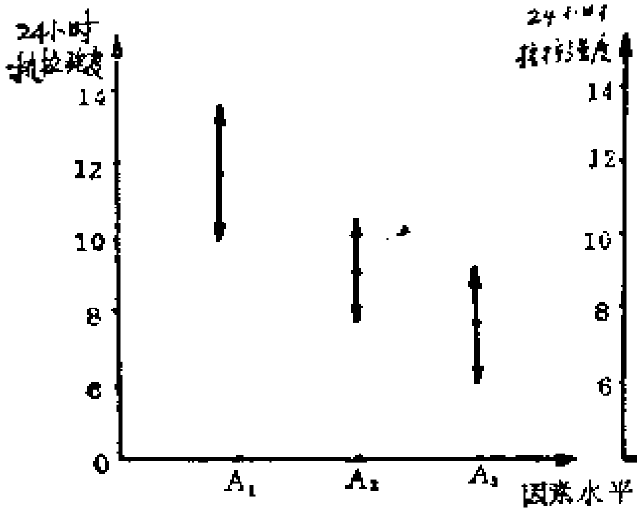
$$\hat{B}_1 = \bar{B}_1 \pm \varepsilon = \frac{375.27}{54} = 6.95 \pm 1.31 = (5.64 \sim 8.26)$$

$$\hat{B}_2 = \bar{B}_2 \pm \varepsilon = \frac{554.33}{54} = 10.27 \pm 1.31 = (8.96 \sim 11.58)$$

$$\hat{B}_3 = \bar{B}_3 \pm \varepsilon = \frac{683.18}{54} \pm 1.31 = 12.65 \pm 1.31$$

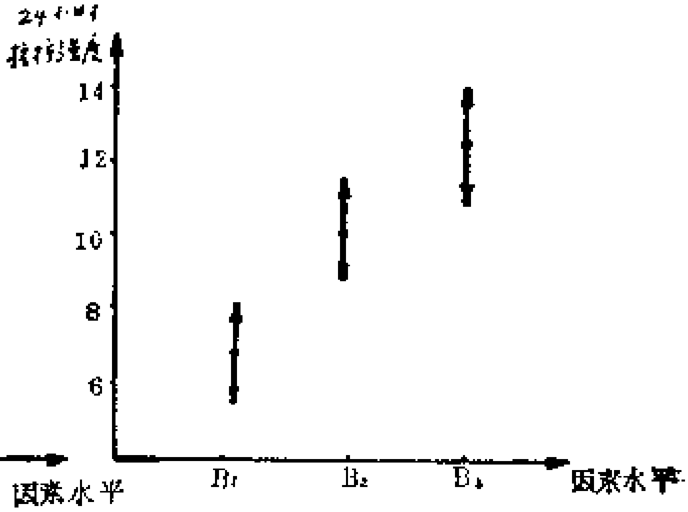
$$= (11.34 \sim 13.96)$$

（2）效应图



原砂含泥量与抗拉强度的关系

图6—1



树脂加入与抗拉强度关系

图6—2

效应图是指对在试验中有显著性差异的因素，为了更好地看出该因素与试验值的关系，通常把各水平的平均值打点于图上，并给出各水平的置信限。

置信限已在图上标出来了。例如，对A₁来说（$\bar{A}_1 - \varepsilon \leqslant \hat{A}_1 \leqslant A_1 + \varepsilon$），其中$\hat{A}_1$是A的真值。就是说区间

$(12.29-1.31,\ 12.29+1.31)=(10.98\sim13.60)$包含$A_1$的真值。$\hat{A}_1$的概率为95%，由于这个概率很大，可以相信该区间确实包含A_1的真值$\hat{A}_1$。或者从实用观点来说，$\hat{A}_1=\bar{A}_1\pm\varepsilon=12.29\pm1.31=(10.98\sim13.60)$，即$\hat{A}_1$可能达到的最大值是13.60，最小值是10.98。

10、计算结果分析

（1）A因素的一次项（S_{A_e}）高度显著，即因素A的各水平在显著性水平0.01时是有显著性差异的。並且贡献率为18.2%。所以，原砂含泥量的大小对树脂砂的抗拉强度影响很大。两者的关系为线性关系，呈负相关。即原砂含泥量越小时，抗拉强度直线上升。所以，在铸造生产中，希望原砂含泥量越小越好。一般规定小于0.5%即可。否则，原砂含泥量高，将使树脂砂中的有效粘结剂减少，造成强度下降。为了保证树脂砂的抗拉强度，就要多消耗一部分树脂（粘结剂）和固化剂（催化剂）。所以，在此试验中选A_1水平。即原砂含泥量为0.4%。

（2）B因素的一次项（S_{B_1}）也是高度显著的，其贡献率为38.6%。

这说明树脂加入量的大小对抗拉强度影响很大，两者的关系也呈线性关系，并为正相关。即树脂量增加，抗拉强度直线上升。但树脂加入量不宜过多，因为它能增加树脂模的厚度，并且多余的树脂会流到砂粒之间的空隙中，造成透气性下降，发气量增大。不仅使铸件产生气孔缺陷，也提高了树脂砂的成本。因此，在保证抗拉强度的前提下，选择成本低的。在本试验中可选B_2水平，即树脂加入量为1.6%，其抗拉强度为8.96～11.58是能满足考核抗拉强度的指标需要大

于8公斤/厘米^{2}的。

（3）固化剂C不是显著因素，因此，可以认为对抗拉强度无影响。所以，选择一个能降低树脂砂成本的最低水平C_1。即固化剂加入量占树脂加入量的45%。

（4）可使用时间D也是不显著因素。但是在实际生产中要求它越短越好。因为可使用时间是指树脂砂可以用以造型制芯时间。时间过长，型芯的充填密度下降，充填密度不足的型芯，表面稳定性不好。同时，浇注时容易产生金属液渗入现象造成铁夹砂缺陷。

（5）$A\times B$，$A\times C$，$B\times C$均不是显著因素。因此，可以认为原砂含泥量与树脂加入量、固化剂加入量，以及树脂与固化剂之间不存在交互作用。

通过上述试验结果的分析，树脂砂最佳工艺参数为$A_1B_2C_1D_1$。即原砂含泥量为0.4%，树脂加入量占原砂重量的1.6%，固化剂加入量为树脂加入量的45%，可使用时间应当是越短越好。要求出砂后立即打芯造型，不许停放。

这一配方不在27次试验中，对于四因素三水平的试验，按所有搭配做齐，就需要做$3^4=81$次试验。而现在只做了27次试验，这27次试验是否有代表性？最好搭配会不会遗漏掉呢？本试验说明，这27次试验具有代表性的，这正是正交试验设计法的优点之一。通过对试验数据的分析，特别是方差分析，就可以抓住主要矛盾，并从试验中找出或推算出最优试验条件。在此基础上作进一步试验。

11、最佳方案工序平均值μ估计和置信极限。

从计算分析中，我们已找出最佳树脂砂配比方案为$A_1B_2C_1D_1$。但是，今后在采用此最佳组合方案生产时，可以期望抗拉强度达到多大呢？设抗拉强度的估计值为$\hat{\mu}_{A_1B_2C_1D_1}$，

由于只有因素A和因素B为显著性因素，所以有：

$\hat{\mu}_{A_1B_2C_1D_1}$ =（全部试验数据的总平均值$\bar{y}$）+（在A_1条件下比$\bar{y}$更好的量）+（在B_2条件下比$\bar{y}$更好的量）$=\bar{y}+(\bar{A}_1-\bar{y})+(\bar{B}_2-\bar{y})=\bar{A}_1+\bar{B}_2+\bar{y}$

$$=12.29+10.27-9.96$$

$$=12.60$$

$\hat{\mu}_{A_1B_2C_1D_1}$的置信限由$\varepsilon=\pm\sqrt{\frac{F_{0.05}(1,24)V_e}{n_e}}$给出，式中$n_e$是有效的重复系数，其计算公式为：

$$n_e=\frac{\text{总 试 验 次 数}}{1+\hat{\mu}_{A_1B_2C_1D_1}\text{的估计中用到的显著效应自由度之和}}$$

本试验中显著效应A、B各有两个自由度，所以：

$$n_e=\frac{27\times 6}{1+2+2}=32.4$$

$F_{0.05}(1,24)=4.26$　　　　　　　　　$V_e=21.8$

$$\varepsilon\pm\sqrt{\frac{4.26\times 21.8}{32.4}}=\pm 1.69$$

因此，工序的平均值估计

$$\mu=\hat{\mu}\pm\varepsilon$$

$$=12.6\pm 1.69=(10.91\sim 14.29)$$

这就是说，当以后采用最佳工艺条件$A_1B_2C_1D_1$生产时，树脂砂24小时的抗拉强度的最高值可望达到14.29。

试验结论是否正确，一般都希望预测在$A_1B_2C_1D_1$条件下进行r次试验后的平均值$\bar{x}$来检验。

$\bar{x}$的预测值为：

$$\bar{x}=\hat{\mu}\pm\sqrt{F_{0.05}(1,\ 24)V_e\left(\frac{1}{n_e}+\frac{1}{r}\right)}$$

式中：r为验证次数，r＝6（即验证6次）。

$$\bar{x}=12.6\pm\sqrt{4.26\times21.8\left(\frac{1}{32.4}+\frac{1}{6}\right)}$$

$$=12.6\pm4.28=(8.32\sim16.88)$$

12、最佳工艺参数的试验验证和生产验证。

根据试验结果分析选出的树脂砂最佳配比方案$A_1B_2C_1D_1$进行试验验证。

原砂用量为2000克，原砂含泥量为0.4%，树脂砂加入量为原砂重量的1.6%，即32克，固化剂加入量为树脂加入量的45%，即14.4克。

试验条件：室温23℃，相对湿度80%。

a、试验验证结果如表6—6所示

表6—6　　试验验证结果

试验号	1	2	3	4	5	6
24小时抗拉强度	14.4	12.4	16.4	11.4	11.2	14.8

从试验结果可以看出，每次试验结果其抗拉强度均满足工艺要求，并在预测估算的范围之内。

b、生产验证

通过试验验证后，树脂砂的抗拉强度达到了工艺要求。然后在生产中对C2216·6—3737多轴自动车床的托架体进行了生产验证。共做4件8个芯子，铸件出模清砂后，检查四件全部质量良好，均符合工艺要求。

四、对最佳配比方案的经济效果评价

按此试验选出的最佳配比方案与原工艺方案进行比较：

生产每台PW1200CNC车床/铸件耗砂量为3530公斤，

其中床身为3000公斤，底座为200公斤，床头为200公斤，支承导轨100公斤，尾台30公斤。

原工艺：每台PW1200CNC车床耗用树脂量占原砂重量的2%，即$3530\times2\%=70.6$公斤。消耗固化剂量占树脂量的75%，即$70.6\times75\%\times75\%=39.71$公斤（固化剂为75%的水溶液）。

新工艺：每台PW1200CNC车床耗用树脂占原砂重量的1.6%，即$3530\times1.6\%=56.48$公斤。固化剂加入量占树脂量的45%，即$56.48\times45\%\times75\%=19.06$公斤。

树脂价格为5,200元/吨，固化剂价格为3,000元/吨。

预计84年生产30台PW1200CNC车床，一年可节约资金为：

$$[(70.6-56.48)\times5.2+(39.71-19.06)\times3]\times30$$
$$=[73.424+61.95]\times30=4061.22\text{元}$$

假若该厂其它产品的重要、关键铸件也都采用树脂砂生产，那么经济效益更为可观。

五、讨论

这次试验通过方差分析达到了预期的目的。但是，在试验过程中还存在着不足，表现为：

1、根据专业知识与实践经验，树脂砂可使用时间，即树脂砂可以用于造型制芯时间对试验指标应该有影响。但是，由于水平选择不当，即水平范围选择过窄，使之在试验过程中没有显示出来。

2、根据已有的专业知识与经验知道，原砂温度对试验指标具有显著影响。但是这次试验没有考虑这一因素，是因为受到试验条件的限制，原砂温度不好控制。所以，只有把它固定在23℃～27°C范围之内。由于试验温差较大。因此，

对试验精度也有较大的影响。在方差分析中，误差项贡献率很大的原因，就在于没有考虑原砂温度这一主要因素。

六、体会

通过这次试验能够看出正交试验设计适用于多因素，多水平的试验，它是运用数学工具解决实际问题的一种方法。它是利用数理统计的方法，应用正交性原理，从大量的试验中挑选适量的具有代表性、典型性的试验点，根据“正交表”来合理安排试验的一种科学方法。本试验是四因素三水平的试验，按所有搭配做齐尚需要$3^4=81$次试验。而现在只做了27次试验。这样就减少了试验次数，缩短了试验周期，节省了人力、物力。

相同的试验次数和试验结果，用方差分析方法能比用极差分析取得更多的信息。

方差分析能充分利用有限的数据，取得较多的精确信息。

极差分析（或直观分析），只有当试验误差包括测量误差并且很小时，直接比较试验结果时，其结论比较接近实际情况。当误差较大时，除了多次重复试验外，否则，其结论是不正确的，甚至是错误的。

在这点上方差分析的可靠性要比极差分析强得多。

正交试验设计法通过方差分析可以做到：

1、可以把试验过程中因素水平（或交互作用）的变化所引起的数据波动，与试验误差引起的数据波动区别开来。

2、可提供一个标准，用来判断所考察因素的作用是否显著。

3、能确定分析的精度——可信度。

4、可把试验的各种因素对特性指标影响大小进行定量

分析，即计算贡献率。

除了上述优点以外，正交试验设计法还能对最佳方案进行效应估计，预测与控制等。

其缺点是在数据的处理上比较繁琐。

应当指出的是，在正交试验设计中，方差分析的前提是假定数据服从正态分布。如果数据不服从正态分布，那么，统计分析的精确性就将受到影响。如果试验数据本身不服从正态分布时，可以通过适当的变换，使变换后的试验数据服从正态分布。常用的变换有四种：

（1）假如数据比较大又比较分散，如金属软管的弯曲次数，轴承的寿命等，可以用对数变换$y=\log X$。

（2）假如数据是计数数据，如布匹中疵点个数等，可以用开方变换$y=\sqrt{x}$。

（3）如果数据是百分数，可以用反正弦变换$y=\sin^{-1}x$。

（4）奥米茄变换。

随着全面质量管理的深入发展，质量管理已不仅仅局限于产品的制造过程。而且不断地向产品的设计开发领域扩展。设计开发包括产品设计和工艺设计的质量管理，以及把专业技术与数理统计结合起来。利用正交试验设计法，能用较少的试验次数和较低的试验费用，找出最优设计参数的组合。从而，使产品具有较好的输出特性和较低的制造成本，并保证产品的设计质量。

我们这次运用正交试验设计法来选择树脂砂最佳配比方案，完全证明了正交设计法是一种科学的质量管理方法。是设计开发领域质量管理的一个重要手段。它必将在各生产部门和科学实验中得到更广泛地推广和应用。

附表1

二列间的交互作用表　$L_{27}(3^{13})$

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(1)		3	2	2	6	5	5	9	8	8	12	11	11
		4	4	3	7	7	6	10	10	9	13	13	12
(2)			1	1	8	9	10	5	6	7	5	6	7
			4	3	11	12	3	11	12	13	8	9	10
(3)				1	9	10	8	7	5	11	6	7	5
				2	13	11	12	12	13	6	10	8	9
(4)					10	8	9	6	7	5	7	5	6
					12	13	11	13	11	12	9	10	8
(5)						1	1	2	3	4	2	4	3
						7	6	11	13	12	8	10	9
(6)							1	4	2	3	3	2	4
							5	13	12	11	10	9	8
(7)								3	4	2	4	3	2
								12	11	13	9	8	10
(8)									1	1	2	3	4
									10	9	5	7	6
(9)										1	4	2	3
										8	7	6	5
(10)											3	4	2
											6	5	7
(11)												1	1
												3	12
(12)													1
													11

附表2

正交多项式的乘数表（水平为等间隔情形）

系数 \ 水平数	K=2	K=3		K=4			K=5			
	b_1	b_1	b_2	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_4
W_1	−1	−1	1	−3	1	−1	−2	2	−1	1
W_2	1	0	−2	−1	−1	3	−1	−1	2	−4
W_3		1	1	1	−1	−3	0	−2	0	6
W_4				3	1	1	1	−1	−2	−4
W_5							2	2	1	1
$\lambda^2 S$	2	2	6	20	4	20	10	14	10	20
λS	1	2	2	10	4	6	10	14	12	24
S	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{2}{3}$	5	4	$\frac{9}{5}$	10	14	$\frac{72}{5}$	$\frac{288}{35}$
λ	2	1	3	2	1	$\frac{10}{3}$	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{12}$

注：表中　K：水平数

b_1：一次项

b_2：二次项

第二节　正交试验设计法在控制轴瓦变形中的应用

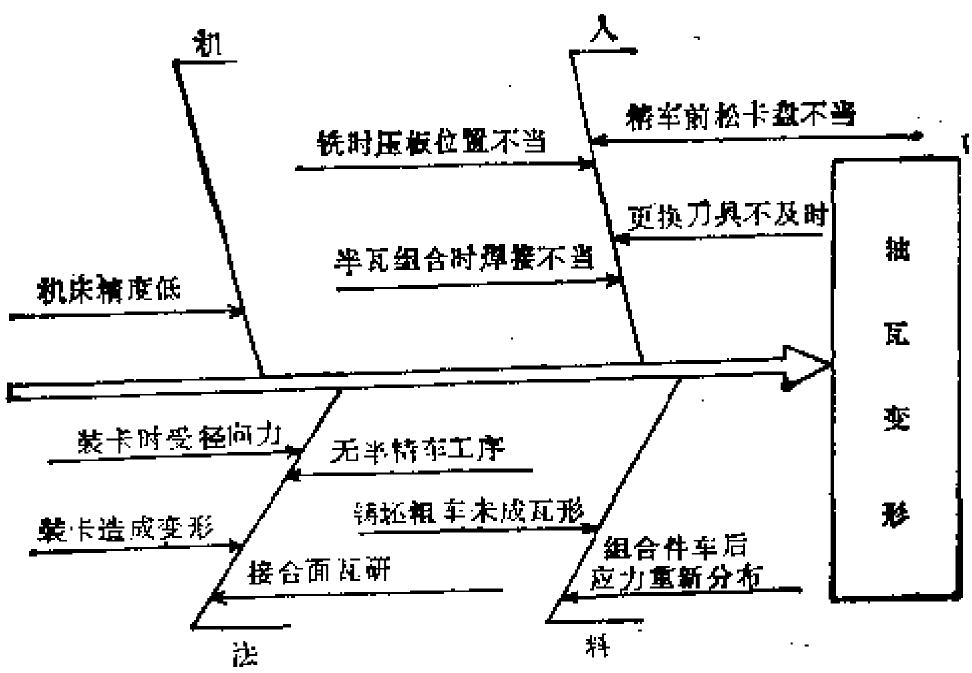
沈阳重型机器厂

1、问题的提出和试验目的

轴瓦是薄壁，半开，易变形的零件。大型轴瓦的变形控制，是重型机器制造工艺中难度较大，多年没有得到解决的问题。为了提高产品质量，适应国内外市场竞争的需要，如何应用数理统计方法，寻求变形量较小的轴瓦加工工艺方案，是生产优质品，“信得过”产品的关键问题。

2、轴瓦变形的分析

根据工艺理论和现场实践，进行轴瓦变形因果分析。



图一轴瓦变形因果分析图

几点说明：

（1）车削装卡方法不当：车削时用夹盘直接夹紧，力着点集中在四个点上，很容易使截面产生梅花状弹性变形，而且愈靠近夹盘变形愈大。零件车圆卸下后，弹性变形还原，破坏了零件的不圆度和不柱度。两半瓦打开后，还要使零件产生收口变形。

（2）焊接应力和焊接变形：零件精车前的两半瓦组合采用电焊方法。焊接时零件局部受热，半瓦上冷下热，产生鞍形变形，使接合面不平。这样焊完一点后，其他的预焊点就会翘起。再焊时，两半瓦互相揪拉使接合面扭曲中间凸起并产生应力。

（3）车削工序安排不当（无半精车工序）：离心铸造的毛坯在组合前需用插床插开，切口较宽，组合后形状即为扁圆。车成轴瓦后由于断面形状改变较大，必然引起铸造应力和上述焊接应力的重新分布。工艺上没有把粗精车分开，零件受到夹盘夹持及组合焊缝的限制，应力重新分布引起的变形不能在精车之前完成。而且切削产生的热量也得不到散失，致使零件产生较大的收口或张口变形。

（4）铸坯粗车形状（未成瓦形）：粗车未成瓦形，使切削余量增大，产生的切削热和切削应力也会增大，成为制品变形的潜在因素。

（5）铣削装夹变形：零件在车削完成后，还需加工瓦口坡和上瓦油槽，当压板较短时，作用力和反作用力形成的力偶也很容易使制品产生变形。

3、试验方案的安排

依据上述分析，确定因子，水平，

A：车削时的装夹方法

A_1　调个前后均用夹盘直接夹紧；

A_2　调个前切环形槽夹紧，调个后夹盘直接夹紧；

A_3　调个前切环形槽夹紧，调个后装十字支撑夹紧；

$A_4 = A_3$

B：铸坯的粗车形状

B_1：车成直筒，B_2 车出瓦形；

C：车削工序的安排

C_1 半精车后，打开重焊再精车；

C_2 半精车后，不打开，放置5～7天再精车。

根据因子，水平数以及工作量的大小，选择$L_8(4^1 \times 2^4)$正交表。

按照选定的方案进行试验，取得试验数据，填入表7—1中。

试验结果的统计分析

计算A、B、C各水平的离差平方和

因素A：$(47.5-54.4)^2+(40-54.5)^2+(65-54.4)^2$
$+(65-54.4)^2=479.69$

因素B：$(56.25-54.4)^2+(52.5-54.4)^2=7.03$

因素C：$(26.25-54.4)^2+(82.50-54.4)^2=1582.03$

$1582.03>479.69>7.03$

说明：车削工序的安排（因子C）是主要因素；夹紧方法（因素A）是次要因素；粗车形状（因素B）影响极小。

求列的总变动与平均变动

$$S_A=S_1=\frac{95^2+80^2+130^2+130^2}{2}-\frac{435^2}{8}=959.4$$

$$S_B=S_2=\frac{225^2+210^2}{4}-\frac{435^2}{8}=28.1$$

表7—1

列号 / 因素 / 试验号	1 A 夹紧方法	2 B 粗车形状	3 空　列	4 空　列	5 C 车削工序安排	考核指标 变形量 $\triangle D$	考核指标 两端变形 均匀情况	考核指标 综合 评分
1	1　A_1	1　B_1	2	2	1　C_1	0.195	最不均匀	15
2	3　A_3	2　B_2	2	1	1	0.125	不太均匀	40
3	2　A_2	2	2	2	2　C_2	0.120	一　般	60
4	4　A_4	1	2	1	2	0.065	最均匀	100
5	1	2	1	1	2	0.100	较均匀	80
6	3	1	1	2	2	0.090	很均匀	90
7	2	1	1	1	1	0.155	很不均匀	20
8	4	2	1	2	1	0.090	不均匀	30
Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ	95 80 130 130	225 210	220 215	240 195	105 330			
	$\frac{Ⅰ}{2}=47.5$ $\frac{Ⅱ}{2}=40$ $\frac{Ⅲ}{2}=65$ $\frac{Ⅳ}{2}=65$	$\frac{Ⅰ}{4}=56.25$ $\frac{Ⅱ}{4}=52.5$	$\frac{Ⅰ}{4}=55$ $\frac{Ⅱ}{4}=53.75$	$\frac{Ⅰ}{4}=60$ $\frac{Ⅱ}{4}=48.75$	$\frac{Ⅰ}{4}=26.25$ $\frac{Ⅱ}{4}=82.5$	$\mu=\frac{T}{8}=\frac{435}{8}=54.4$		

$$S_3=\frac{220^2+215^2}{4}-\frac{435^2}{8}=3.1$$

$$S_4=\frac{240^2+195^2}{4}-\frac{435^2}{8}=253.1$$

$$S_C=S_5=\frac{105^2+330^2}{4}-\frac{435^2}{8}=6328.1$$

总变动：$S_{总}=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=7571.8$

误差变动：$S_{误}=S_3+S_4=256.2$

自由度　　$f_{总}=8-1=7$

$f_A=4-1=3$

$f_B=f_C=2-1=1$

$f_{误}=f_3+f_4=2$

各列平均变动

$$V_A=\frac{S_A}{f_A}=\frac{959.4}{3}=319.8$$

$$V_B=\frac{S_B}{f_B}=\frac{28.1}{1}=28.1$$

$$V_C=\frac{S_C}{f_C}=\frac{6328.1}{1}=6328.1$$

$$V_{误}=\frac{S_{误}}{f_{误}}=\frac{256.2}{2}=128.1$$

看出：因素B和因素A 的平均变动与误差的平均变动相差不多，故可并入误差项。则

$$S_{\overset{\triangle}{误}}=S_A+S_B+S_3+S_4=1243.7$$

$$f_{\overset{\triangle}{误}}=f_A+f_B+f_3+f_4=6$$

于是：误差的平均变动

$$V_{误}^{\triangle}=\frac{S_{误}^{\triangle}}{f_{误}^{\triangle}}=\frac{1243.7}{6}=207.28$$

$$F_C=\frac{V_C}{V_{误}^{\triangle}}=\frac{6328.1}{207.28}=30.53$$

如果$\alpha=0.01$的F分布则查表$F_{0.01}(1,6)=13.7$由于$F_C>F_{0.01}(1,6)$，故有99%的把握断言，“车削工序的安排”因素的改变对结果的影响是高度显著的列方差分析表7—2所示

表7—2

方差来源	S	f	V	F	显著性
$A^{\triangle}$	959.4	3	319.8		
$B^{\triangle}$	28.1	1	28.1		
C	6328.1	1	6328.1	30.53	* *
误	256.2	2	128.1		
误$^{\triangle}$	1243.7	6	207.28		

选取工程条件，计算其工程平均

从试验结果可知，较优的工艺条件为$A_3(A_4)B_1C_2$

$$\mu_{A_3(A_4)B_1C_2}=54.4+(82.5-54.4)$$
$$=82.5$$

现在，来计算$\mu_{A_3(A_4)B_1C_2}$的变动半径δ_α，这个值求出以后，我们就有$1-\alpha$的把握断言$A_{3(4)}B_1C_2$条件下的试验真值将在$\mu_{A_3(A_4)B_1C_2}-\delta_\alpha$与$\mu_{A_3(A_4)B_1C_2}+\delta_\alpha$之间

$$\delta\alpha=\sqrt{F\alpha(1,\tilde{f}_{误})\frac{\tilde{S}_{误}}{\tilde{f}_{误}\,n_e}}$$

其中 $\widetilde{S}_{误}=\overset{\triangle}{S}_{误}$

$\widetilde{f}_{误}=\overset{\triangle}{f}_{误}$

$F_{0.05}(1,6)=5.99$

$$n_e=\frac{8}{1+1}=4$$

$$\delta_{0.05}=\sqrt{\frac{5.99\times1243.7}{6\times4}}\doteq17.6$$

于是有95%的把握断言，如果采用 $A_{3(4)}B_1C_2$ 条件真值将在82.5－17.6到82.5＋17.6之间即65到100之间就是精车后变形量将在0.10到0.065之间

采用上述较优工艺条件，组织生产，使轴瓦变形均已控制在小于0.10mm 范围内，达到了预期目标。见卷板机成果表7—3所示。

表7—3

项目	对策前	对策后	预期目标	是否达到预期目标
变形量	0.20～0.50mm	0.10mm	0.15mm	超过目标
变形均匀情况	很不均匀	均匀	均匀	达到
总废品及回用品率	85.5%	0	0	达到
装瓦耗费工时	2～3班次/台	0.5～1班次/台		
装配间隙	偏上差或超差	中间公差		

通过生产验证，说明正交试验设计法所取得的最佳工艺方案，所生产出的产品是令人满意的，并取得好的效果。将

上述对策编入“通用工艺”。轴瓦加工通用工艺，不仅适用于Z937 30×3200三辊卷板机轴瓦的生产，而且适用于Z931～Z937其他六种规格卷板机轴瓦的生产。

今后打算，进行粘接代替焊接的试验，掌握轴瓦的粘接技术，通过下一批的试验，使卷板机轴瓦的装配达到不刮不研的世界先进水平。

附　　录

一、正 交 表

（1）m = 2 的情形

$L_4(2^3)$

试验号＼列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

〔注〕 任意二列间的交互作用出现于另一列。

$L_8(2^7)$

试验号＼列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

$L_8(2^7)$：二列间的交互作用表

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
	(1)	3	2	5	4	7	6
		(2)	1	6	7	4	5
			(3)	7	6	5	4
				(4)	1	2	3
					(5)	3	2
						(6)	1

$L_{12}(2^{11})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1

$L_{16}(2^{15})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

$L_{16}(2^{15})$：二列间的交互作用表

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
		(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
			(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
				(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
					(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
						(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9
							(7)	15	14	13	12	11	10	9	8
								(8)	1	2	3	4	5	6	7
									(9)	3	2	5	4	7	6
										(10)	1	6	7	4	5
											(11)	7	6	5	4
												(12)	1	2	3
													(13)	3	2
														(14)	1

$L_{32}(2^{31})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
4	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
5	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2
6	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2
7	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
8	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
9	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
10	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
11	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1
12	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1
13	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1
14	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1
15	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2
16	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2
17	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
18	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
19	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2
20	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2
21	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2
22	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2
23	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1
24	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1
25	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
26	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
27	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1
28	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1
29	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1
30	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1
31	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2
32	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
1	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2
1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2
2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2
1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2
2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
2	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1
2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1
1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1
1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2

$L_{32}(2^{31})$：二列间的交互作用表

列号＼列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15
		(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12
			(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13
				(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10
					(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11
						(6)	1	14	15	12	13	10	11	8
							(7)	15	14	13	12	11	10	9
								(8)	1	2	3	4	5	6
									(9)	3	2	5	4	7
										(10)	1	6	7	4
											(11)	7	6	5
												(12)	1	2
													(13)	3
														(14)

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
14	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30
13	18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29
12	19	13	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28
11	20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27
10	21	20	23	22	17	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26
9	22	23	20	21	18	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25
8	23	22	21	20	19	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24
7	24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23
6	25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22
5	26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21
4	27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20
3	28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19
2	29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18
1	30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17
(15)	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
	(16)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		(17)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
			(18)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
				(19)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
					(20)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
						(21)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
							(22)	1	14	15	12	13	10	11	8	9
								(23)	15	14	13	12	11	10	9	8
									(24)	1	2	3	4	5	6	7
										(25)	3	2	5	4	7	6
											(26)	1	6	7	4	5
												(27)	7	6	5	4
													(28)	1	2	3
														(29)	3	2
															(30)	1

（2） m = 3 的情形

$L_9(3^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

〔注〕任意二列间的交互作用出现于另外二列。

$L_{18}(3^7)$ 〔注〕

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	1′
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	1
3	1	3	3	3	3	3	3	1
4	2	1	1	2	2	3	3	1
5	2	2	2	3	3	1	1	1
6	2	3	3	1	1	2	2	1
7	3	1	2	1	3	2	3	1
8	3	2	3	2	1	3	1	1
9	3	3	1	3	2	1	2	1
10	1	1	3	3	2	2	1	2
11	1	2	1	1	3	3	2	2
12	1	3	2	2	1	1	3	2
13	2	1	2	3	1	3	2	2
14	2	2	3	1	2	1	3	2
15	2	3	1	2	3	2	1	2
16	3	1	3	2	3	1	2	2
17	3	2	1	3	1	2	3	2
18	3	3	2	1	2	3	1	2

〔注〕把两水平的列1′排进L_{18} (3^7)使得混合型$L_{18}(2^1\times3^7)$。交互作用1′×1可以从两列的二元表去求出。在$L_{18}(2^1\times3^7)$中把列1′和列1的水平组合11，12，13，21，22，23分别换成1，2，3，4，5，6便得混合型$L_{18}(6^1\times3^6)$。

$L_{27}(3^{13})$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2

$L_{27}(3^{13})$：二列间的交互作用表

列号＼列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	(1)	3	2	2	6	5	5	9	8	8	12	11	11
		4	4	3	7	7	6	10	10	9	13	13	12
		(2)	1	1	8	9	10	5	6	7	5	6	7
			4	3	11	12	13	11	12	13	8	9	10
			(3)	1	9	10	8	7	5	6	6	7	5
				2	13	11	12	12	13	11	10	8	9
				(4)	10	8	9	6	7	5	7	5	6
					12	13	11	13	11	12	9	10	8
					(5)	1	1	2	3	4	2	4	3
						7	6	11	13	12	8	10	9
						(6)	1	4	2	3	3	2	4
							5	13	12	11	10	9	8
							(7)	3	4	2	4	3	2
								12	11	13	9	8	10
								(8)	1	1	2	3	4
									10	9	5	7	6
									(9)	1	4	2	3
										8	7	6	5
										(10)	3	4	2
											6	5	7
											(11)	1	1
												13	12
												(12)	1
													11

$L_{36}(3^{13})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1′	2′	3′
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
3	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1
4	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1	2	2
5	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1	2	2
6	1	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	1	2	2
7	1	1	1	2	3	1	2	3	3	1	2	2	3	2	1	2
8	1	2	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	1	2	1	2
9	1	3	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	2	1	2
10	1	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	2	2	1
11	1	2	2	1	3	2	1	3	1	3	2	1	3	2	2	1
12	1	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	2	1	2	2	1
13	2	1	2	3	1	3	2	1	3	3	2	1	2	1	1	1
14	2	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	2	3	1	1	1
15	2	3	1	2	3	2	1	3	2	2	1	3	1	1	1	1
16	2	1	2	3	2	1	1	3	2	3	3	2	1	1	2	2
17	2	2	3	1	3	2	2	1	3	1	1	3	2	1	2	2
18	2	3	1	2	1	3	3	2	1	2	2	1	3	1	2	2
19	2	1	2	1	3	3	3	1	2	2	1	2	3	2	1	2
20	2	2	3	2	1	1	1	2	3	3	2	3	1	2	1	2
21	2	3	1	3	2	2	2	3	1	1	3	1	2	2	1	2
22	2	1	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	2	2	2	1
23	2	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	1	3	2	2	1
24	2	3	1	1	2	2	3	1	3	3	2	2	1	2	2	1
25	3	1	3	2	1	2	3	3	1	3	1	2	2	1	1	1
26	3	2	1	3	2	3	1	1	2	1	2	3	3	1	1	1
27	3	3	2	1	3	1	2	2	3	2	3	1	1	1	1	1
28	3	1	3	2	2	2	1	1	3	2	3	1	3	1	2	2
29	3	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	2	1	1	2	2
30	3	3	2	1	1	1	3	3	2	1	2	3	2	1	2	2
31	3	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	1	1	2	1	2
32	3	2	1	1	1	3	1	3	3	2	3	2	2	2	1	2
33	3	3	2	2	2	1	2	1	1	3	1	3	3	2	1	2
34	3	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	2	2	1
35	3	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	2	2	2	1
36	3	3	2	3	1	2	1	2	3	1	1	2	3	2	2	1

〔注〕把两水平的列1′、2′和3′排进$L_{36}(3^{13})$，便得混合型$L_{36}(2^3\times3^{13})$。这时交互作用1′×2′出现于3′，并且交互作用1′×1，2′×1和3′×1可分别从各自的二元表求出。

（3）m = 4 的情形

$L_{32}(4^9)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1′
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1
3	1	3	3	3	3	3	3	3	3	1
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	1
5	2	1	1	2	2	3	3	4	4	1
6	2	2	2	1	1	4	4	3	3	1
7	2	3	3	4	4	1	1	2	2	1
8	2	4	4	3	3	2	2	1	1	1
9	3	1	2	3	4	1	2	3	4	1
10	3	2	1	4	3	2	1	4	3	1
11	3	3	4	1	2	3	4	1	2	1
12	3	4	3	2	1	4	3	2	1	1
13	4	1	2	4	3	3	4	2	1	1
14	4	2	1	3	4	4	3	1	2	1
15	4	3	4	2	1	1	2	4	3	1
16	4	4	3	1	2	2	1	3	4	1
17	1	1	4	1	4	2	3	2	3	2
18	1	2	3	2	3	1	4	1	4	2
19	1	3	2	3	2	4	1	4	1	2
20	1	4	1	4	1	3	2	3	2	2
21	2	1	4	2	3	4	1	3	2	2
22	2	2	3	1	4	3	2	4	1	2
23	2	3	2	4	1	2	3	1	4	2
24	2	4	1	3	2	1	4	2	3	2
25	3	1	3	3	1	2	4	4	2	2
26	3	2	4	4	2	1	3	3	1	2
27	3	3	1	1	3	4	2	2	4	2
28	3	4	2	2	4	3	1	1	3	2
29	4	1	3	4	2	4	2	1	3	2
30	4	2	4	3	1	3	1	2	4	2
31	4	3	1	2	4	2	4	3	1	2
32	4	4	2	1	3	1	3	4	2	2

〔注〕把两水平的列1′排进$L_{32}(4^9)$，使得混合型$L_{32}(2^1\times4^9)$。这时交互作用1′×1可从二元表求出，把列1′和1的水平组合11，12，13，14，21，22，23，24分别换成1，2，3，4，5，6，7，8，便得混合型$L_{32}(8^1\times4^8)$。

$L_{16}(4^5)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2

〔注〕任意二列间的交互作用出现于其他三列。

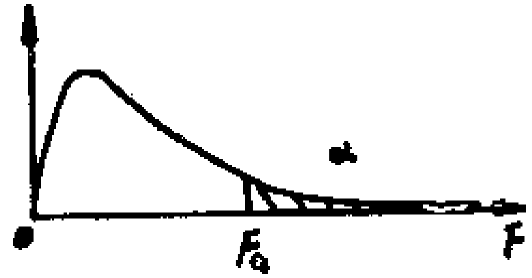
(4) m = 5 的情形

$L_{25}(5^6)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4
5	1	5	5	5	5	5
6	2	1	2	3	4	5
7	2	2	3	4	5	1
8	2	3	4	5	1	2
9	2	4	5	1	2	3
10	2	5	1	2	3	4
11	3	1	3	5	2	4
12	3	2	4	1	3	5
13	3	3	5	2	4	1
14	3	4	1	3	5	2
15	3	5	2	4	1	3
16	4	1	4	2	5	3
17	4	2	5	3	1	4
18	4	3	1	4	2	5
19	4	4	2	5	3	1
20	4	5	3	1	4	2
21	5	1	5	4	3	2
22	5	2	1	5	4	3
23	5	3	2	1	5	4
24	5	4	3	2	1	5
25	5	5	4	3	2	1

〔注〕 任意二列间的交互作用出现于其他四列。

二、F 检验临界值（Fα）表



$\alpha = 0.10$　　　　$P(F > F\alpha) = \alpha$

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	∞	f_1 / f_2
1	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	61.2	61.7	62.3	62.7	63.0	63.2	63.3	63.3	1
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.42	9.44	9.46	9.47	9.48	9.49	9.49	9.49	2
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.20	5.18	5.17	5.15	5.14	5.14	5.14	5.13	3
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.87	3.84	3.82	3.80	3.78	3.77	3.76	3.76	4
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.24	3.21	3.17	3.15	3.13	3.12	3.11	3.10	5
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.87	2.84	2.80	2.77	2.75	2.73	2.73	2.72	6
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.63	2.59	2.56	2.52	2.50	2.48	2.48	2.47	7

续表

8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.63	2.59	2.56	2.54	2.46	2.42	2.33	2.35	2.32	2.31	2.30	2.29	8
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.34	2.30	2.25	2.22	2.19	2.17	2.17	2.16	9
10	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.24	2.20	2.15	2.12	2.09	2.07	2.06	2.06	10
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.17	2.12	2.08	2.04	2.00	1.99	1.98	1.97	11
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.10	2.06	2.01	1.97	1.94	1.92	1.91	1.90	12
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.23	2.23	2.20	2.16	2.14	2.05	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.85	1.85	13
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.01	1.96	1.91	1.87	1.83	1.82	1.80	1.80	14
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	1.97	1.92	1.87	1.83	1.79	1.77	1.76	1.76	15
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.13	2.13	2.09	2.06	2.03	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.73	1.72	16
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.91	1.86	1.81	1.76	1.73	1.71	1.69	1.69	17
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.89	1.84	1.78	1.74	1.70	1.68	1.67	1.66	18
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.05	2.02	1.98	1.96	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.64	1.63	19
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.62	1.61	20
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.81	1.76	1.70	1.65	1.61	1.59	1.58	1.57	22
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.78	1.73	1.67	1.62	1.58	1.56	1.54	1.53	24

续表

26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.76	1.71	1.65	1.59	1.55	1.53	1.51	1.50	26
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.74	1.69	1.63	1.57	1.53	1.50	1.49	1.48	28
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.72	1.67	1.61	1.55	1.51	1.48	1.47	1.46	30
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.66	1.61	1.54	1.48	1.43	1.41	1.39	1.38	40
50	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73	1.63	1.57	1.50	1.44	1.39	1.36	1.34	1.33	50
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.60	1.54	1.48	1.41	1.36	1.33	1.31	1.29	60
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68	1.57	1.51	1.44	1.38	1.32	1.28	1.26	1.24	80
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.70	1.66	1.56	1.49	1.42	1.35	1.29	1.26	1.23	1.21	100
200	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.52	1.46	1.38	1.31	1.24	1.20	1.17	1.14	200
500	2.72	2.31	2.10	1.96	1.86	1.79	1.73	1.68	1.64	1.61	1.50	1.44	1.36	1.28	1.21	1.16	1.12	1.09	500
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.49	1.42	1.34	1.26	1.18	1.13	1.08	1.00	∞

$\alpha = 0,05$

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	f_1 / f_2
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	245	246	247	248	1
2	18,5	19,0	19,2	1,93	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	2
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66	3
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,84	5,82	5,80	4
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64	4,60	4,58	4,56	5
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,92	3,90	3,87	6
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,53	3,49	3,47	3,44	7
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,24	3,20	3,17	3,15	8
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03	2,99	2,96	2,94	9
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,86	2,83	2,80	2,77	10
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,74	2,70	2,67	2,65	11
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64	2,60	2,57	2,54	12
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,55	2,51	2,48	2,46	13
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,44	2,41	2,39	14

续表

15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.42	2.38	2.35	2.33	15
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37	2.33	2.30	2.28	16
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.33	2.29	2.26	2.23	17
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29	2.25	2.22	2.19	18
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.26	2.21	2.18	2.16	19
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.22	2.18	2.15	2.12	20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.20	2.16	2.12	2.10	21
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.17	2.13	2.10	2.07	22
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.15	2.11	2.07	2.05	23
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.13	2.09	2.05	2.03	24
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01	25
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.09	2.05	2.02	1.99	26
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.97	27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.06	2.02	1.99	1.96	28
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.05	2.01	1.97	1.94	29

续表

30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04	1.99	1.96	1.93	30
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.07	2.01	1.97	1.94	1.91	32
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	34
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.03	1.98	1.93	1.90	1.87	36
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.02	1.96	1.92	1.88	1.85	38
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.95	1.90	1.87	1.84	40
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.33	2.14	2.17	2.11	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	42
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.32	2.23	2.16	2.10	2.05	1.98	1.92	1.88	1.84	1.81	44
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.31	2.22	2.15	2.09	2.04	1.97	1.91	1.87	1.83	1.80	46
48	4.04	3.19	2.80	2.57	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.96	1.90	1.86	1.82	1.79	48
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.89	1.85	1.81	1.78	50
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.82	1.78	1.75	60
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.88	1.82	1.77	1.73	1.70	80
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68	100
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.96	1.91	1.83	1.77	1.72	1.69	1.65	125

续表

150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.82	1.76	1.71	1.67	1.64	150
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.80	1.74	1.69	1.66	1.62	200
300	3.87	3.03	2.63	2.40	2.24	2.13	2.04	1.97	1.91	1.86	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61	300
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.77	1.71	1.66	1.62	1.59	500
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.76	1.70	1.65	1.41	1.58	1000
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.04	1.94	1.88	1.83	1.75	1.69	1.64	1.60	1.57	∞

$\alpha=0.05$

f_1 / f_2	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞	f_1 / f_2
1	249	249	249	250	250	251	251	251	252	252	252	253	254	254	254	1
2	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	2
3	8.65	8.64	8.63	8.62	8.62	8.60	8.59	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.54	8.53	8.53	3
4	5.79	5.77	5.76	5.75	5.75	5.73	5.72	5.71	5.70	5.69	5.67	5.66	5.65	5.64	5.63	4
5	4.54	4.53	4.52	4.50	4.50	4.48	4.46	4.45	4.44	4.43	4.41	4.41	4.39	4.37	4.37	5
6	3.86	3.84	3.83	3.82	3.81	3.79	3.77	3.76	3.75	3.74	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67	6

续表

7	3.43	3.41	3.40	3.39	3.38	3.36	3.34	3.33	3.32	3.30	3.29	3.27	3.25	3.24	3.23	7
8	3.13	3.12	3.10	3.09	3.03	3.06	3.04	3.03	3.02	3.01	2.99	2.97	2.95	2.94	2.93	8
9	2.92	2.90	2.89	2.87	2.86	2.84	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71	9
10	2.75	2.74	2.72	2.71	2.70	2.68	2.66	2.65	2.64	2.62	2.60	2.59	2.56	2.55	2.54	10
11	2.63	2.61	2.59	2.58	2.57	2.55	2.53	2.52	2.51	2.49	2.47	2.46	2.43	2.42	2.40	11
12	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47	2.44	2.43	2.41	2.40	2.38	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30	12
13	2.44	2.42	2.41	2.39	2.38	2.36	2.34	2.33	2.31	2.30	2.27	2.26	2.23	2.22	2.21	13
14	2.37	2.35	2.33	2.32	2.31	2.28	2.27	2.25	2.24	2.22	2.20	2.19	2.16	2.14	2.13	14
15	2.31	2.29	2.27	2.26	2.25	2.22	2.20	2.19	2.18	2.16	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07	15
16	2.25	2.24	2.22	2.21	2.19	2.17	2.15	2.14	2.12	2.11	2.03	2.07	2.04	2.02	2.01	16
17	2.21	2.19	2.17	2.16	2.15	2.12	2.10	2.09	2.08	2.05	2.03	2.02	1.99	1.97	1.96	17
18	2.17	2.15	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06	2.05	2.04	2.02	1.99	1.98	1.96	1.93	1.92	18
19	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	2.05	2.03	2.01	2.00	1.98	1.96	1.94	1.91	1.89	1.88	19
20	2.10	2.08	2.07	2.05	2.04	2.01	1.99	1.93	1.97	1.95	1.92	1.91	1.88	1.86	1.84	20
21	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.96	1.95	1.94	1.92	1.89	1.88	1.84	1.82	1.81	21

续表

22	2.05	2.03	2.01	2.00	1.98	1.96	1.94	1.92	1.91	1.89	1.86	1.85	1.82	1.80	1.78	22
23	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76	23
24	2.00	1.98	1.97	1.95	1.94	1.91	1.89	1.83	1.86	1.84	1.82	1.80	1.77	1.75	1.73	24
25	1.98	1.96	1.95	1.93	1.92	1.89	1.87	1.86	1.84	1.82	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71	25
26	1.97	1.95	1.93	1.91	1.90	1.87	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.73	1.71	1.69	26
27	1.95	1.93	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	1.82	1.81	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.67	27
28	1.93	1.91	1.90	1.88	1.87	1.84	1.82	1.80	1.79	1.77	1.74	1.73	1.69	1.67	1.65	28
29	1.92	1.90	1.88	1.87	1.85	1.83	1.81	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.67	1.65	1.64	29
30	1.91	1.89	1.87	1.85	1.84	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.71	1.70	1.66	1.64	1.62	30
32	1.88	1.86	1.85	1.83	1.82	1.79	1.77	1.75	1.74	1.71	1.69	1.67	1.63	1.61	1.59	32
34	1.86	1.84	1.82	1.80	1.80	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.66	1.65	1.61	1.59	1.57	34
36	1.85	1.82	1.81	1.79	1.78	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.64	1.62	1.59	1.56	1.55	36
38	1.83	1.81	1.79	1.77	1.76	1.73	1.71	1.69	1.68	1.65	1.62	1.61	1.57	1.54	1.53	38
40	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.64	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51	40
42	1.80	1.78	1.76	1.74	1.73	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62	1.59	1.57	1.53	1.51	1.49	42

续表

44	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.69	1.67	1.65	1.63	1.61	1.58	1.56	1.52	1.49	1.48	44
46	1.78	1.76	1.74	1.72	1.71	1.68	1.65	1.64	1.62	1.60	1.57	1.55	1.51	1.48	1.46	46
48	1.77	1.75	1.73	1.71	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.59	1.56	1.54	1.49	1.47	1.45	48
50	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69	1.66	1.63	1.61	1.60	1.58	1.54	1.52	1.48	1.46	1.44	50
60	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62	1.59	1.57	1.56	1.53	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39	60
80	1.68	1.65	1.63	1.62	1.60	1.57	1.54	1.52	1.51	1.48	1.45	1.43	1.38	1.35	1.32	80
100	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.54	1.52	1.49	1.48	1.45	1.41	1.39	1.34	1.31	1.28	100
125	1.63	1.60	1.58	1.57	1.55	1.52	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.36	1.31	1.27	1.25	125
150	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.45	1.44	1.41	1.37	1.34	1.29	1.25	1.22	150
200	1.60	1.57	1.55	1.53	1.52	1.48	1.46	1.43	1.41	1.39	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19	200
300	1.58	1.55	1.53	1.51	1.50	1.46	1.43	1.41	1.39	1.36	1.32	1.30	1.23	1.19	1.15	300
500	1.56	1.54	1.52	1.50	1.48	1.45	1.42	1.40	1.38	1.34	1.30	1.28	1.21	1.16	1.11	500
1000	1.55	1.53	1.51	1.49	1.47	1.44	1.41	1.38	1.36	1.33	1.29	1.26	1.19	1.13	1.08	1000
∞	1.54	1.52	1.50	1.48	1.46	1.42	1.39	1.37	1.35	1.32	1.27	1.24	1.17	1.11	1.00	∞

$\alpha = 0.01$

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	f_1 / f_2
1	405	500	540	563	576	586	593	598	602	606	611	614	617	619	621	1
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	2
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.8	26.8	26.7	3
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.2	14.1	14.0	4
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.77	9.68	9.61	9.55	5
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.60	7.52	7.45	7.40	6
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.36	6.27	6.21	6.16	7
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.56	5.48	5.41	5.36	8
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	5.00	4.92	4.86	4.81	9
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.60	4.52	4.46	4.41	10
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.29	4.21	4.15	4.10	11
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.05	3.97	3.91	3.86	12
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.86	3.78	3.71	3.66	13
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.70	3.62	3.56	3.51	14

续表

15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.56	3.49	3.42	3.37	15
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.45	3.37	3.31	3.26	16
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.35	3.27	3.21	3.16	17
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.25	3.19	3.13	3.08	18
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.19	3.12	3.05	3.00	19
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.13	3.05	2.99	2.94	20
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.07	2.99	2.93	2.88	21
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	3.02	2.94	2.88	2.83	22
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.97	2.89	2.83	2.78	23
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.93	2.85	2.79	2.74	24
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.89	2.81	2.75	2.70	25
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.86	2.78	2.72	2.66	26
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.82	2.75	2.68	2.63	27
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.79	2.72	2.65	2.60	28
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.77	2.69	2.62	2.57	29

续表

30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.74	2.66	2.60	2.55	30
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02	2.93	2.80	2.70	2.62	2.55	2.50	32
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.76	2.66	2.58	2.51	2.46	34
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95	2.86	2.72	2.62	2.54	2.48	2.43	36
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92	2.83	2.69	2.59	2.51	2.45	2.40	38
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.56	2.48	2.42	2.37	40
42	7.28	5.15	4.29	3.80	3.49	3.27	3.10	2.97	2.86	2.78	2.64	2.54	2.46	2.40	2.34	42
44	7.25	5.12	4.26	3.78	3.47	3.24	3.08	2.95	2.84	2.75	2.62	2.52	2.44	2.37	2.32	44
46	7.22	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.06	2.93	2.82	2.73	2.60	2.50	2.42	2.35	2.30	46
48	7.20	5.08	4.22	3.74	3.43	3.20	3.04	2.91	2.80	2.72	2.58	2.48	2.40	2.33	2.28	48
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79	2.70	2.56	2.46	2.38	2.32	2.27	50
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.39	2.31	2.25	2.20	60
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.42	2.31	2.23	2.17	2.12	80
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.37	2.26	2.19	2.12	2.07	100
125	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.66	2.55	2.47	2.33	2.23	2.15	2.08	2.03	125
150	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53	2.44	2.31	2.20	2.12	2.06	2.00	150
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.27	2.17	2.09	2.02	1.97	200
300	6.72	4.68	3.85	3.38	3.08	2.86	2.70	2.57	2.47	2.38	2.24	2.14	2.06	1.99	1.94	300
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36	2.22	2.12	2.04	1.77	1.92	500
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.20	2.10	2.02	1.95	1.90	1000
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.08	2.00	1.93	1.88	∞

$\alpha=0.01$

f_2 \ f_1	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞	f_1 / f_2
1	622	623	624	625	626	628	629	630	630	631	633	633	635	636	637	1
2	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	2
3	26.6	26.6	26.6	26.5	26.5	26.5	26.4	26.4	26.4	26.3	26.3	26.2	26.2	26.1	26.1	3
4	14.0	13.9	13.9	13.9	13.8	13.8	13.7	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5	13.5	4
5	9.51	9.47	9.43	9.40	9.38	9.33	9.29	9.26	9.24	9.20	9.16	9.13	9.08	9.04	9.02	5
6	7.35	7.31	7.28	7.25	7.23	7.18	7.14	7.11	7.09	7.06	7.01	6.99	6.93	6.90	6.88	6
7	6.11	6.07	6.04	6.02	5.99	5.94	5.91	5.88	5.86	5.82	5.78	5.75	5.70	5.67	5.65	7
8	5.32	5.28	5.25	5.22	5.20	5.15	5.12	5.00	5.07	5.03	4.99	4.96	4.91	4.88	4.86	8
9	4.77	4.73	4.70	4.67	4.65	4.60	4.57	4.54	4.52	4.48	4.44	4.42	4.36	4.33	4.31	9
10	4.36	4.33	4.30	4.27	4.25	4.20	4.17	4.14	4.12	4.08	4.04	4.01	3.96	3.93	3.91	10
11	4.06	4.02	3.99	3.96	3.94	3.89	3.86	3.83	3.81	3.78	3.73	3.71	3.66	3.62	3.60	11
12	3.82	3.78	3.75	3.72	3.70	3.65	3.62	3.59	3.57	3.54	3.49	3.47	3.41	3.38	3.36	12
13	3.62	3.59	3.56	3.53	3.51	3.46	3.43	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.22	3.19	3.17	13
14	3.46	3.43	3.40	3.37	3.35	3.30	3.27	3.24	3.22	3.18	3.14	3.11	3.06	3.03	3.00	14

续表

15	3.33	3.29	3.26	3.24	3.21	3.17	3.13	3.10	3.08	3.05	3.00	2.98	2.92	2.89	2.87	15
16	3.22	3.18	3.15	3.12	3.10	3.05	3.02	2.99	2.97	2.93	2.89	2.86	2.81	2.78	2.75	16
17	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.96	2.92	2.89	2.87	2.83	2.79	2.76	2.71	2.68	2.65	17
18	3.03	3.00	2.97	2.94	2.92	2.87	2.84	2.81	2.78	2.75	2.70	2.68	2.62	2.59	2.57	18
19	2.96	2.92	2.89	2.87	2.84	2.80	2.76	2.73	2.71	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.49	19
20	2.90	2.86	2.83	2.80	2.78	2.73	2.69	2.67	2.64	2.61	2.56	2.54	2.48	2.44	2.42	20
21	2.84	2.80	2.77	2.74	2.72	2.67	2.64	2.61	2.58	2.55	2.50	2.48	2.42	2.38	2.36	21
22	2.78	2.75	2.72	2.69	2.67	2.62	2.58	2.55	2.53	2.50	2.45	2.42	2.36	2.33	2.31	22
23	2.74	2.70	2.67	2.64	2.62	2.57	2.54	2.51	2.48	2.45	2.40	2.37	2.32	2.28	2.26	23
24	2.70	2.66	2.63	2.60	2.58	2.53	2.49	2.46	2.44	2.40	2.36	2.33	2.27	2.24	2.21	24
25	2.66	2.62	2.59	2.56	2.54	2.49	2.45	2.42	2.40	2.36	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17	25
26	2.62	2.58	2.55	2.53	2.50	2.45	2.42	2.39	2.36	2.33	2.28	2.25	2.19	2.16	2.13	26
27	2.59	2.55	2.52	2.49	2.47	2.42	2.38	2.35	2.33	2.29	2.25	2.22	2.16	2.12	2.10	27
28	2.56	2.52	2.49	2.46	2.44	2.39	2.35	2.32	2.30	2.26	2.22	2.19	2.13	2.09	2.06	28
29	2.53	2.49	2.46	2.44	2.41	2.36	2.33	2.30	2.27	2.23	2.19	2.16	2.10	2.06	2.03	29

续表

30	2.51	2.47	2.44	2.41	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.16	2.13	2.07	2.03	2.01	30
32	2.46	2.42	2.39	2.36	2.34	2.29	2.25	2.22	2.20	2.16	2.11	2.08	2.02	1.98	1.96	32
34	2.42	2.38	2.35	2.32	2.30	2.25	2.21	2.18	2.16	2.12	2.07	2.04	1.98	1.94	1.91	34
36	2.38	2.35	2.32	2.29	2.26	2.21	2.17	2.14	2.12	2.08	2.03	2.00	1.94	1.90	1.87	36
38	2.35	2.32	2.28	2.26	2.23	2.18	2.14	2.11	2.09	2.05	2.00	1.97	1.90	1.86	1.84	38
40	2.33	2.29	2.26	2.23	2.20	2.15	2.11	2.08	2.06	2.02	1.97	1.94	1.87	1.84	1.80	40
42	2.30	2.26	2.23	2.20	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.91	1.85	1.80	1.78	42
44	2.28	2.24	2.21	2.18	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.97	1.92	1.89	1.82	1.78	1.75	44
46	2.26	2.22	2.19	2.16	2.13	2.08	2.04	2.01	1.99	1.95	1.90	1.86	1.80	1.75	1.73	46
48	2.24	2.20	2.17	2.14	2.12	2.06	2.02	1.99	1.97	1.93	1.88	1.84	1.78	1.73	1.70	48
50	2.22	2.18	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.97	1.95	1.91	1.86	1.82	1.76	1.71	1.68	50
60	2.15	2.12	2.08	2.05	2.03	1.98	1.94	1.90	1.88	1.84	1.78	1.75	1.68	1.63	1.60	60
80	2.07	2.03	2.00	1.97	1.94	1.89	1.85	1.81	1.79	1.75	1.69	1.66	1.58	1.53	1.49	80
100	2.02	1.98	1.94	1.92	1.89	1.84	1.80	1.76	1.73	1.69	1.63	1.60	1.52	1.47	1.43	100
125	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.80	1.76	1.72	1.69	1.65	1.59	1.55	1.47	1.41	1.37	125

续表

150	1.96	1.92	1.88	1.85	1.83	1.77	1.73	1.69	1.66	1.62	1.56	1.52	1.43	1.38	1.33	150
200	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.58	1.52	1.48	1.39	1.33	1.28	200
300	1.89	1.85	1.82	1.79	1.76	1.71	1.66	1.62	1.59	1.55	1.48	1.44	1.35	1.28	1.22	300
500	1.87	1.83	1.79	1.76	1.74	1.68	1.63	1.60	1.56	1.52	1.45	1.41	1.31	1.23	1.16	500
1000	1.85	1.81	1.77	1.74	1.72	1.66	1.61	1.57	1.54	1.50	1.43	1.38	1.28	1.19	1.11	1000
∞	1.83	1.79	1.76	1.72	1.70	1.64	1.59	1.55	1.52	1.47	1.40	1.36	1.25	1.15	1.00	∞

后　　记

为了提高产品质量，降低成本，增强产品的竞争能力，企业必须不断地改造老产品，设计新产品。产品开发必须进行大量的试验、研究工作。在生产和科学试验中，试验结果经常受到多因素的影响。正交试验法就是利用正交表来安排多因素的试验，利用数理统计方法解决多因素试验问题的一种科学方法。随着全面质量管理在我国的深入和推广，正交试验法已在我国工农业生产中得到广泛应用，收到良好的效果。

本书共分六章，头四章介绍了正交试验法的基本思想，应用范围，试验结果的统计分析方法以及正交表的灵活运用；第五章阐述正交试验法应用的数理统计的基本原理、概念和基础知识；第六章介绍两个应用实例。书后还附有常用的正交表和F检验表。本书专为工厂和科研单位从事试验、产品开发及质量管理的同志编写，力求通俗易懂，阐明道理，便于应用。

书中的第一、三、五章及第六章应用实例一，由侯化国编写；第二、四章及第六章应用实例二由王玉民编写。在本书编写过程中得到有关工厂、院校的大力支持，特别是辽宁大学的朱绍范老师为本书编写提出许多宝贵意见，在此表示衷心感谢！

由于我们的知识有限，经验不足，书中错误在所难免，敬请广大读者提出批评指正。

编　者

1985年6月　于长春